ELSEVIER
Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
Journal of Functional Analysis 235 (2006) 449–542
JOURNAL OF Functional Analysis
www.elsevier.com/locate/jfa

La formule de Plancherel pour les groupes de Lie presque algébriques réels

M.S. Khalgui [a], P. Torasso [b,*]

[a] *Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis, Campus universitaire, 1060 Tunis, Tunisie*
[b] *UMR CNRS 6086, Laboratoire de Mathématiques et Applications, SP2MI, BP 30179, 86962 Chasseneuil cedex, France*

Reçu le 1$^{\text{er}}$ janvier 2005 ; accepté le 24 février 2005

Disponible sur Internet le 10 janvier 2006

Communiqué par M. Vergne

Abstract

We give a proof of the Plancherel formula for real almost algebraic groups in the philosophy of the orbit method, following the lines of the one given by M. Duflo and M. Vergne for simply connected semisimple Lie groups. Main ingredients are: (1) Harish-Chandra's descent method which, interpreting Plancherel formula as an equality of semi-invariant generalized functions, allows one to reduce it to a neighbourhood of zero in the Lie algebra of the centralizer of any elliptic element; (2) character formula for representations constructed by M. Duflo, we recently proved; (3) Poisson–Plancherel formula near elliptic elements s in good position, a generalization of the classical Poisson summation formula expressing the Fourier transform of the sum of a series of Harish-Chandra type elliptic orbital integrals in the Lie algebra centralizing s as a generalized function supported on a set of admissible regular forms in the dual of this Lie algebra.

Keywords: Almost algebraic groups; Plancherel formula; Poisson–Plancherel formula; Harish-Chandra descent method; Character formula

* Auteur correspondant.
Adresses e-mail : mohamedsalah.khalgui@fst.rnu.tn (M.S. Khalgui), pierre.torasso@math.univ-poitiers.fr (P. Torasso).

0022-1236/$ – see front matter
doi:10.1016/j.jfa.2005.02.016

1. Introduction

Dans [10], M. Duflo énonce la formule de Plancherel pour les groupes presque algébriques réels unimodulaires. Dans un précédent article [23], nous avons esquissé les grandes lignes d'une démonstration de celle-ci, utilisant à la fois la méthode de descente de Harish-Chandra et la méthode des orbites, et le but du présent travail est d'en donner les détails. En fait cette démonstration suit, en l'adaptant au cas plus général qui nous occupe, la démonstration proposée par M. Duflo et M. Vergne dans [13] de la formule de Plancherel–Harish-Chandra pour les groupes semi-simples simplement connexes. Si, comme nous l'allons voir, la méthode de démonstration utilisée généralise celle de Kirillov dans le cas des groupes nilpotents (voir [25]), elle diffère sensiblement sur certains points de celle de Harish-Chandra dans le cas des groupes réductifs (voir [17]).

De nombreux autres auteurs ont donné des démonstrations sensiblement différentes, quoique dans l'esprit de la méthode des orbites, de la formule de Plancherel pour certaines classes de groupes de Lie. Au risque d'en oublier, citons Duflo et Raïs [12] pour les groupes résolubles exponentiels, Charbonnel [3] pour les groupes résolubles connexes, Andler [1] pour les groupes de Lie algébriques complexes unimodulaires.

Il est particulièrement intéressant, du point de vue de l'analyse harmonique, de considérer la classe des groupes presque algébriques. En effet, elle contient celle des groupes nilpotents et celle des groupes réductifs pour lesquels de nombreux résultats sont connus, dont la formule de Plancherel, elle est constituée de groupes de type I (voir [4]) et elle est stable par le passage aux revêtements finis intervenant dans le procédé d'induction de Mackey. De plus, comme il est expliqué dans [30], de nombreuses questions d'analyse harmonique sur un groupe de Lie simplement connexe se ramènent à son groupe dérivé qui est presque algébrique.

Soit G un groupe de Lie de type I, $\mathrm{d}_G x$ une mesure de Haar à gauche sur G, Δ_G la fonction module et $\widehat{G}$ le dual unitaire de G, i.e. l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de G. On sait qu'il existe une mesure $\mathrm{d}\mu_{\widehat{G}}(T)$ sur $\widehat{G}$ et une famille d'opérateurs $(A_T)_{T\in\widehat{G}}$, où pour chaque T, A_T est un opérateur fermé à domaine dense dans l'espace de T, semi-invariant de poids $\Delta_G^{-1/2}$, telles que l'on ait la formule d'inversion de Plancherel :

$$\varphi(1) = \int_{\widehat{G}} \mathrm{Tr}\big(A_T T(\varphi\,\mathrm{d}_G x) A_T\big)\,\mathrm{d}\mu_{\widehat{G}}(T), \quad \varphi \in \mathscr{D}(G), \tag{1.1}$$

la fermeture, notée de même, de l'opérateur $A_T T(\varphi\,\mathrm{d}_G x) A_T$ étant à trace pour $\mathrm{d}\mu_{\widehat{G}}(T)$-presque tout T. De plus, la classe de la mesure de Plancherel $\mathrm{d}\mu_{\widehat{G}}(T)$ est unique et la donnée de la mesure détermine pour $\mathrm{d}\mu_{\widehat{G}}(T)$-presque tout T la famille d'opérateurs $(A_T)_{T\in\widehat{G}}$ (voir [11]). Lorsque le groupe G est unimodulaire, on prend $A_T = \mathrm{Id}$, $T \in \widehat{G}$, auquel cas la mesure de Plancherel est unique.

Les résultats de cet article permettent en principe de donner, pour un groupe presque algébrique G, une description explicite de la (classe de la) mesure de Plancherel $\mathrm{d}\mu_{\widehat{G}}(T)$ et de la famille d'opérateurs $(A_T)_{T\in\widehat{G}}$. D'une part, on dispose d'un espace de paramètres P_G et d'une application injective $p \mapsto T_p$ de P_G dans $\widehat{G}$ dont l'image supporte la mesure de Plancherel (voir [10]). D'autre part, la formule (9.2) du Théorème 9.1.1, qui dépend d'un caractère χ d'un sous-groupe discret central Γ de G (voir aussi la formule (1.11) ci-après), combinée à la formule de Plancherel pour ce dernier : $\varphi(1)=\int_{\Gamma^\wedge}(\sum_{\gamma\in\Gamma}\varphi(\gamma)\chi(\gamma))\,\mathrm{d}\chi$, permet de décrire la (classe de la) mesure $\mathrm{d}\mu_{P_G}(p)$ sur P_G telle que l'on ait :

$$\varphi(1)=\int\limits_{P_G}\mathrm{Tr}\big(A_{T_p}T_p(\varphi\,\mathrm{d}_Gx)A_{T_p}\big)\,\mathrm{d}\mu_{P_G}(p),\quad \varphi\in\mathscr{D}(G), \tag{1.2}$$

la « formule de Plancherel concrète » (1.2) étant équivalente à la formule (1.1) et donnant donc une description explicite de la mesure $\mathrm{d}\mu_{\widehat{G}}(T)$. Evidemment, ceci suppose que l'on a muni P_G d'une structure borélienne standard telle qu'un certain nombre d'applications naturelles définies sur P_G, dont l'application $p\mapsto T_p$, soient boréliennes. Si l'existence d'une telle structure est plus que vraisemblable : elle a été démontrée par Andler pour les groupes algébriques complexes unimodulaires (voir [1] et également [10]), sa construction reste au delà des objectifs de cet article.

Dans la suite de cette introduction, $G=(G,j,\boldsymbol{G})$ est un groupe de Lie presque algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (voir le numéro 2.17 ci-après).

Expliquons l'idée de la démonstration dans deux cas simples pour commencer. Supposons d'abord que G soit un groupe de Lie nilpotent simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de sorte que $\exp:\mathfrak{g}\to G$ est un difféomorphisme. La démonstration que nous présentons est, dans ce cas, celle de Kirillov [25]. Si $\varphi\in\mathscr{D}(\mathfrak{g})$, la formule d'inversion de Fourier pour l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ permet d'écrire :

$$\varphi(0)=\int\limits_{\mathfrak{g}^*}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}X)\hat{\ }(g)\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^*}g, \tag{1.3}$$

où $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}X$ est une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}$, $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^*}g$ est la mesure de Lebesgue duale et $(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}X)\hat{\ }$ désigne la transformée de Fourier de la densité $\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}X$. Par ailleurs, on sait que toute orbite coadjointe Ω de G dans $\mathfrak{g}^*$ est une variété symplectique et comme telle possède une mesure de Liouville canonique $\mathrm{d}\beta_\Omega$. Alors, divisant la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^*}g$ par les mesures $\mathrm{d}\beta_\Omega$, on obtient une mesure $\mathrm{d}\mu_G$ sur l'espace des orbites $G\setminus\mathfrak{g}^*$ et la formule d'inversion (1.3) s'écrit :

$$\varphi(0)=\int\limits_{G\setminus\mathfrak{g}^*}\left\{\int\limits_{\Omega}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}X)\hat{\ }(g)\,\mathrm{d}\beta_\Omega(g)\right\}\mathrm{d}\mu_G(\Omega). \tag{1.4}$$

Maintenant, depuis Kirillov, on sait qu'il existe une bijection de $G\setminus\mathfrak{g}^*$ sur le dual $\widehat{G}$ du groupe G, qui à l'orbite Ω fait correspondre la représentation à trace T_Ω entièrement déterminée par le fait que son caractère est donné par :

$$\mathrm{Tr}\Bigg(\int\limits_G\varphi(x)T_\Omega(x)\,\mathrm{d}_Gx\Bigg)=\int\limits_\Omega(\varphi\circ\exp\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}X)\hat{\ }(g)\,\mathrm{d}\beta_\Omega(g),\quad \varphi\in\mathscr{D}(G), \tag{1.5}$$

où d_Gx désigne la mesure de Haar sur G tangente à la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}X$. Nous désignerons par Θ_Ω la fonction généralisée caractère de T_Ω. Alors, compte tenu des Éqs. (1.4) et (1.5), la formule d'inversion de Fourier (1.3) s'écrit aussi :

$$\varphi(1) = \int_{G\backslash\mathfrak{g}^*} \Theta_\Omega(\varphi\,\mathrm{d}_G x)\,\mathrm{d}\mu_G(\Omega), \quad \varphi \in \mathscr{D}(G).$$

La mesure $\mathrm{d}\mu_G$ est donc la mesure de Plancherel pour G, compte tenu de l'identification de $G \setminus \mathfrak{g}^*$ avec $\widehat{G}$.

Nous allons voir que l'on peut généraliser cette méthode au cas d'un groupe presque algébrique, en l'adaptant. Pour ce faire, nous aurons besoin d'un analogue de la formule d'inversion (1.3) et de la formule du caractère (1.5). Donnons un deuxième exemple simple qui fera mieux appréhender les objets à introduire. On considère le tore $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$, l'application exponentielle étant la projection canonique de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Dans ce cas, on ne peut associer une représentation à une orbite coadjointe, d'ailleurs ici réduite à un point, que si cette dernière est admissible, c'est-à-dire vérifie une condition d'intégralité. En effet, $\mathfrak{g}^*$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{R}$ et $\widehat{G}$ s'identifie au sous-ensemble $\mathfrak{g}^*_G = 2\pi\mathbb{Z}$ au moyen de l'application $l \mapsto T_l$, où T_l est le caractère de G défini par $T_l(\exp X) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}lX}$, $X \in \mathfrak{g}$. Alors, la théorie des séries de Fourier nous dit que, si $\mathrm{d}_G x$ est la mesure de Haar sur G de masse totale 1, la formule de Plancherel pour G s'écrit :

$$\varphi(1) = \sum_{l\in\mathfrak{g}^*_G} T_l(\varphi\,\mathrm{d}_G x), \quad \varphi \in \mathscr{D}(G). \tag{1.6}$$

Donnons une autre démonstration de cette formule, montrant une des idées importantes intervenant dans notre démonstration de la formule de Plancherel. On commence par interpréter la formule (1.6) comme une égalité de distributions :

$$\delta_1 = \sum_{l\in\mathfrak{g}^*_G} T_l\,\mathrm{d}_G x,$$

ou entre fonctions généralisées :

$$\delta_1/\mathrm{d}_G x = \sum_{l\in\mathfrak{g}^*_G} T_l. \tag{1.7}$$

Pour démontrer cette égalité, il suffit de montrer qu'elle est satisfaite au voisinage de chacun des points de G. Soit donc $s \in G$; alors l'application $X \mapsto s\exp X$ induit un difféomorphisme d'un voisinage ouvert assez petit de 0 dans $\mathfrak{g}$ sur un voisinage ouvert de s dans G. Par suite, si l'on remonte l'égalité (1.7) au moyen de ce difféomorphisme, on se ramène à montrer, dans un voisinage ouvert assez petit de 0 dans $\mathfrak{g}$, les égalités suivantes :

$$\sum_{l\in\mathfrak{g}^*_G} \mathrm{e}^{\mathrm{i}lX}\,\mathrm{d}_\mathfrak{g} X = \delta_0 \qquad \sum_{l\in\mathfrak{g}^*_G} T_l(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}lX}\mathrm{d}_\mathfrak{g} X = 0, \quad \text{si } s \neq 1.$$

Or ces deux égalités sont des conséquences immédiates de la formule sommatoire de Poisson sur $\mathbb{R}$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(-S+k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi kS}(\varphi\,\mathrm{d}y)\hat{}\,(2\pi k), \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \tag{1.8}$$

où dy désigne la mesure de Lebesgue canonique et où l'on prend $S \in \mathbb{R} = \mathfrak{g}$ tel que $s = \exp S$. Posant $E_{G,s} = \{X \in \mathfrak{g}\colon\ s^{-1} \exp X = 1\}$, on peut réécrire (1.8) comme suit :

$$\sum_{X \in E_{G,s^{-1}}} \varphi(X) = \sum_{l \in \mathfrak{g}_G^*} T_l(s)(\varphi\, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} X)\hat{}\,(l). \tag{1.9}$$

C'est cette dernière formule que nous allons généraliser, sous le nom de formule de Poisson–Plancherel, au cas d'un groupe presque algébrique quelconque et qui nous permettra de démontrer la formule de Plancherel. Nous suivons en cela une idée de M. Vergne qui a conjecturé cette formule lorsque $s = 1$ pour les groupes de Lie de type I dans [37,38], et l'a démontrée dans le cas des groupes semi-simples linéaires dans [36].

D'autre part, du fait que l'application exponentielle n'est en général ni surjective, ni un difféomorphisme local, nous sommes amenés à utiliser la méthode de descente de Harish-Chandra qui permet de ramener une égalité entre fonctions généralisées semi-invariantes sur le groupe G à une égalité de fonctions généralisées semi-invariantes dans un voisinage de 0 de $\mathfrak{g}(s)$, le centralisateur de s dans $\mathfrak{g}$, s parcourant l'ensemble des éléments elliptiques de G.

Soit maintenant $G = (G, j, \boldsymbol{G})$ un groupe presque algébrique quelconque. Pour rendre plus agréable les calculs, nous fixons un caractère unitaire χ d'un sous-groupe Γ d'indice fini de $\ker j$ et nous écrivons la formule de Plancherel modulo χ. De plus, pour simplifier, dans le cadre de cette introduction, nous supposerons que le groupe G est unimodulaire. On se donne une mesure de Haar $\mathrm{d}_G x$ sur G et on munit $\mathfrak{g}$ de la mesure de Lebesgue tangente $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}} X$ et $\mathfrak{g}^*$ de la mesure duale $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^*} g$.

Soit $p_G : \widetilde{G} \to G$ le revêtement métalinéaire de G associé à la représentation adjointe (voir [14, Paragraphe 5.3] et aussi le numéro 4.6 ci-après). Le fait que l'action adjointe de $\widetilde{G}$ se relève de manière canonique en un morphisme $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ à valeurs dans $\mathrm{ML}(\mathfrak{g})$ permet de définir un caractère ζ de $\ker j \circ p_G$ à valeurs dans $\{\pm 1\}$ (voir le numéro 4.7). On considère alors le caractère $\breve{\chi} = (\zeta|_{p_G^{-1}(\Gamma)})\chi \circ p_G$.

Tout d'abord, M. Duflo a donné une description en termes d'orbites d'une grosse partie du dual de G supportant la mesure de Plancherel (voir [10]) et défini une mesure canonique sur l'ensemble d'orbites correspondant. Soit $g \in \mathfrak{g}^*$ une forme linéaire fortement régulière : cela signifie que g est régulière de sorte que l'algèbre de Lie algébrique $\mathfrak{g}(g)$ est commutative et de plus que l'unique facteur réductif $\mathfrak{j}_g$ de $\mathfrak{g}(g)$, qui est un tore algébrique, est de dimension maximale. La forme g est χ-admissible si et seulement si elle vérifie

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}g(X)} = \breve{\chi}(\exp_{\widetilde{G}} X), \quad X \in \mathfrak{j}_g,\ \exp X \in \Gamma. \tag{1.10}$$

On désigne par $\mathfrak{g}_r^*$ l'ensemble des formes linéaires fortement régulières et par $\mathfrak{g}_{G,\chi}^*$ le sous-ensemble de celles qui sont χ-admissibles : ce dernier est une sous-variété analytique régulièrement plongée et G-invariante de $\mathfrak{g}^*$. Les sous-algèbres $\mathfrak{j}_g$ lorsque g parcourt $\mathfrak{g}_r^*$ sont ce que l'on appelle les sous-algèbres de Cartan–Duflo de $\mathfrak{g}$ et leur ensemble est noté $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$. Soit $\mathfrak{j} \in \mathrm{car}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{t}$ la partie anisotrope de $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{t}_\Gamma = \{X \in \mathfrak{t}\colon\ \exp X \in \Gamma\} = \{X \in \mathfrak{t}\colon\ \exp_{\widetilde{G}} X \in p_G^{-1}(\Gamma)\}$ et $\mathfrak{t}_{\Gamma,\chi}^* = \{\mu \in \mathfrak{t}^*\colon\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(X)} = \breve{\chi}(\exp_{\widetilde{G}} X),\ X \in \mathfrak{t}_\Gamma\}$. Alors, $\mathfrak{t}_\Gamma$ est un réseau de $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_{\Gamma,\chi}^*$ est un translaté du réseau dual et il est clair que, si $\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$ désigne le sous-espace de $\mathfrak{g}^*$ constitué des formes centralisées par $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{g}_{G,\chi}^{*\mathfrak{j}} := \mathfrak{g}_{G,\chi}^* \cap \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$ est l'ensemble des $g \in \mathfrak{g}_r^{*\mathfrak{j}} := \mathfrak{g}_r^* \cap \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$ dont la restriction à $\mathfrak{t}$ est dans $\mathfrak{t}_{\Gamma,\chi}^*$. Utilisant ce fait et la formule sommatoire de Poisson relative au réseau $\mathfrak{t}_\Gamma$, il n'est pas difficile de construire une fonction généralisée invariante canonique $m_{G,\chi}$ sur

$\mathfrak{g}_r^*$, telle que $m_{G,\chi}\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^*}g$ soit une mesure de Radon concentrée sur $\mathfrak{g}_{G,\chi}^*$ (voir le numéro 6.7). On montre alors (voir [21, Théorème 4.10]) que $m_{G,\chi}\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^*}g$, vue comme une mesure borélienne concentrée sur $\mathfrak{g}_r^*$, est une mesure de Radon tempérée sur $\mathfrak{g}^*$ notée $\mathrm{d}m_{G,\chi}$. Par suite, la formule $m_{G,\chi} = \mathrm{d}m_{G,\chi}/\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^*}g$ permet de prolonger de manière naturelle $m_{G,\chi}$ en une fonction généralisée tempérée sur $\mathfrak{g}^*$ tout entier. Enfin, on désigne par $\mathrm{d}\mu_{G,\chi}$ la mesure sur $G \setminus \mathfrak{g}_{G,\chi}^*$ obtenue en divisant la mesure $\mathrm{d}m_{G,\chi}$ par les mesures de Liouville des orbites coadjointes.

Introduisons alors l'ensemble des données de χ-admissibilité pour G, $X_{G,\chi} = \{(g,\tau)\colon\ g \in \mathfrak{g}_{G,\chi}^*, \tau \in X_{G,\chi}(g)\}$, où $X_{G,\chi}(g)$, l'ensemble des données de χ-admissibilité pour g, est l'ensemble des représentations unitaires irréductibles τ de l'extension métaplectique $G(g)^g$ définie par l'action symplectique de $G(g)$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)$, telles que

(i) $\tau(\exp X) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}g(X)}\mathrm{Id}$, $X \in \mathfrak{g}(g)$,
(ii) $\tau(\epsilon) = -\mathrm{Id}$, où ϵ est l'élément non trivial de la projection naturelle de $G(g)^g$ sur $G(g)$,
(iii) $\tau(\gamma) = \chi(\gamma)\mathrm{Id}$, $\gamma \in \Gamma$, où on a relevé de manière évidente Γ en un sous-groupe de $G(g)^g$ (voir le numéro 8.1).

Le groupe G agit naturellement dans $X_{G,\chi}$. M. Duflo a construit une application $(g,\tau) \mapsto T_{g,\tau}$ passant au quotient en une injection de $G \setminus X_{G,\chi}$ dans le sous-ensemble $\widehat{G}_\chi$ de $\widehat{G}$ des représentations T ayant pour restriction à Γ un multiple de χ. Si pour $(g,\tau) \in X_{G,\chi}$, la représentation $T_{g,\tau}$ est à trace, on note $\Theta_{g,\tau}$ son caractère. Le fait que $T_{g,\tau}$ est à trace est équivalent au fait que (la mesure de Liouville de) l'orbite coadjointe de g est tempérée (voir [18,19]). On ne sait pas si c'est le cas pour tout $g \in \mathfrak{g}_{G,\chi}^*$. Cependant, on montre que $\mathrm{d}\mu_{G,\chi}$-presque toute orbite $\Omega \in G \setminus \mathfrak{g}_{G,\chi}^*$ est tempérée.

Suivant M. Duflo dans [10], on définit sur $X_{G,\chi}$ une fonction de Plancherel $(g,\tau) \mapsto \xi_G(g,\tau)$ qui est G-invariante et s'exprime à l'aide des fonctions de Plancherel–Harish-Chandra des revêtements universels de certains sous-groupes réductifs connexes de G (voir les numéros 8.3 à 8.8). Si $\Omega \in G \setminus \mathfrak{g}_{G,\chi}^*$ est tempérée, on définit la fonction généralisée $\Theta_{\Omega,\chi}$ sur G en posant :

$$\Theta_{\Omega,\chi} = \bigl[G(g) : G(g)_0\Gamma\bigr]^{-1} \sum_{\tau \in X_{G,\chi}(g)} \dim\tau\,\xi_G(g,\tau)\Theta_{g,\tau},$$

où g est un élément quelconque de Ω. La formule de Plancherel pour le groupe G s'écrit alors, comme une égalité entre distributions invariantes :

$$\int_{G\setminus\mathfrak{g}_{G,\chi}^*} (\Theta_{\Omega,\chi}\,\mathrm{d}_G x)\,\mathrm{d}\mu_{G,\chi}(\Omega) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \chi(\gamma)\delta_\gamma, \tag{1.11}$$

ou, comme une égalité entre fonctions généralisées invariantes :

$$\int_{G\setminus\mathfrak{g}_{G,\chi}^*} \Theta_{\Omega,\chi}\,\mathrm{d}\mu_{G,\chi}(\Omega) = \Bigl(\sum_{\gamma\in\Gamma} \chi(\gamma)\delta_\gamma\Bigr)\Big/\mathrm{d}_G x. \tag{1.12}$$

Pour montrer cette égalité entre fonctions généralisées invariantes, on tente d'appliquer la méthode de descente de Harish-Chandra. Soit s un élément elliptique de G. Il existe un voisinage assez petit de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$ sur lequel toute fonction généralisée Θ invariante sur G possède une restriction Θ^s, formellement définie par

$$\Theta^s(X) = \Theta(s \exp X). \tag{1.13}$$

De plus toute fonction généralisée G-invariante Θ est entièrement déterminée par la connaissance des fonctions généralisées Θ^s pour tout élément elliptique s de G. Pour montrer l'égalité (1.12), on montrera alors, pour tout $s \in G$ elliptique, la relation suivante entre fonctions généralisées sur un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$:

$$\int\limits_{G\backslash\mathfrak{g}^*_{G,\chi}} \Theta^s_{\Omega,\chi}\, \mathrm{d}\mu_{G,\chi}(\Omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } s \notin \Gamma, \\ \chi(s)(\delta_0/\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}X), & \text{si } s \in \Gamma. \end{cases} \tag{1.14}$$

Soit à nouveau $(g, \tau) \in X_{G,\chi}$, Ω l'orbite de g et $s \in G$ un élément elliptique. Comme l'ensemble Ω^s des points fixes de s dans Ω est une réunion finie de $G(s)$-orbites dans $\mathfrak{g}(s)^*$, il est muni d'une mesure de Liouville $\mathrm{d}\beta_{\Omega^s}$. De plus, suivant Duflo, Heckman et Vergne dans [15], on définit une fonction canonique $G(s)$-invariante sur Ω^s, notée $\Phi^s_{g,\tau}$. Dans [22], nous avons démontré que si les mesures $\mathrm{d}\beta_\Omega$ et $\mathrm{d}\beta_{\Omega^s}$ sont tempérées, alors on a dans le voisinage de 0 considéré plus haut sur lequel la formule (1.13) est valable pour toute fonction généralisée invariante :

$$\Theta^s_{g,\tau}(X) = k^{-1}_{\mathfrak{g},s}(X) \int\limits_{\Omega^s} \mathrm{e}^{\mathrm{i}l(X)} \Phi^s_{g,\tau}(l)\, \mathrm{d}\beta_{\Omega^s}(l), \tag{1.15}$$

où $k_{\mathfrak{g},s}$ est une fonction analytique strictement positive, prenant la valeur 1 en $X = 0$ (voir les numéros 9.3 et A.2).

La formule du caractère (1.15), ou plutôt sa généralisation aux ψ-caractères (voir le numéro 9.1, la Proposition 9.3.1 et le Théorème A.2.1) est le dernier en date d'un ensemble de résultats, à commencer par ceux de Kirillov qui contiennent cette formule pour les groupes nilpotents [24], ainsi que des indications pour une formule générale au voisinage de $s = 1$ [26,27]. La formule pour $s = 1$ a été démontrée par Duflo et Raïs dans le cas résoluble exponentiel [12], par Pedersen dans le cas résoluble [28], par Rossmann dans le cas réductif [32,33], et par Khalgui dans le cas général [18,19]. Enfin, la formule pour s quelconque a été établie par Duflo, Heckman et Vergne pour les séries discrètes des groupes semi-simples connexes [15], et par Bouaziz pour les représentations tempérées à caractère infinitésimal régulier des groupes réductifs [2]. Ducloux en a récemment donné une généralisation nettement plus élaborée valable pour toutes les représentations tempérées d'un groupe réductif [7].

Pour revenir à notre sujet, nous ne savons malheureusement pas montrer que, si la mesure $\mathrm{d}\beta_\Omega$ est tempérée, alors il en est de même pour $\mathrm{d}\beta_{\Omega^s}$. Par suite, il n'est pas possible d'utiliser directement la méthode de descente. En fait nous sommes amenés à distinguer deux cas, suivant que s est en « bonne position » ou non. Un élément elliptique $s \in G$ est dit en bonne position s'il existe $g \in \mathfrak{g}^*_r$ tel que $j(s)$ soit contenu dans le tore algébrique connexe de $\boldsymbol{G}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{j}_{g\mathbb{C}}$.

Lorsque s n'est pas en bonne position, on montre directement, par récurrence sur la dimension de G, qu'il existe un voisinage invariant de s dans lequel, pour toute orbite tempérée $\Omega \in G \setminus \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$, $\Theta_{\Omega,\chi}$ s'annule et, donc, que $\Theta^s_{\Omega,\chi} = 0$, $\Omega \in G \setminus \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$. Il est alors clair que la relation (1.14) est vraie dans ce cas.

Supposons maintenant que s soit en bonne position. On montre que dans ce cas, la mesure $\mathrm{d}\beta_{\Omega^s}$ est tempérée pour $\mathrm{d}\mu_{G,\chi}$-presque toute orbite $\Omega \in G \setminus \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$. Si les mesures $\mathrm{d}\beta_{\Omega}$ et $\mathrm{d}\beta_{\Omega^s}$ sont tempérées, la formule (1.15) entraîne que, dans le même voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$ où elle est valable, on a l'égalité de fonctions généralisées

$$\Theta^s_{\Omega,\chi} = k^{-1}_{\mathfrak{g},s}\theta^s_{\Omega,\chi},$$

où $\theta^s_{\Omega,\chi}$ est la fonction généralisée tempérée sur $\mathfrak{g}(s)$ définie par

$$\theta^s_{\Omega,\chi}(X) = \left[G(g) : G(g)_0\Gamma\right]^{-1} \sum_{\tau\in X_{G,\chi}(g)} \dim\tau\,\xi_G(g,\tau) \int_{\Omega^s} \mathrm{e}^{\mathrm{i}l(X)}\Phi^s_{g,\tau}(l)\,\mathrm{d}\beta_{\Omega^s}(l).$$

Pour établir l'égalité (1.14), nous sommes donc amenés à évaluer la fonction généralisée sur $\mathfrak{g}(s)$ donnée par

$$\int_{G\setminus\mathfrak{g}^*_{G,\chi}} \theta^s_{\Omega,\chi}\,\mathrm{d}\mu_{G,\chi}(\Omega).$$

Pour ce faire, nous devons introduire une distribution tempérée sur $\mathfrak{g}(s)$ obtenue comme somme d'une série d'intégrales orbitales à la Harish-Chandra. Tout d'abord, on se donne un élément $\tilde{s}$ du revêtement métalinéaire $\widetilde{G}$ de G tel que $p_G(\tilde{s}) = s$. Si $T \in \mathfrak{g}(s)$ est un élément elliptique, on définit une distribution tempérée $G(\tilde{s})$-invariante sur $\mathfrak{g}(s)$, $M_{G(\tilde{s}),T}$, supportée par l'orbite de T sous $G(\tilde{s})$ (voir le numéro 7.1). Si T est centralisé par $G(\tilde{s})$, on a $M_{G(\tilde{s}),T} = \delta_T$.

On pose $E_{G,s,\Gamma} = \{T \in \mathfrak{g}(s)\colon\ s^{-1}\exp T \in \Gamma\}$ et on introduit alors la distribution sur $\mathfrak{g}(s)$

$$v_{G,\chi,\tilde{s}} = \sum_{T\in G(\tilde{s})\setminus E_{G,s,\Gamma}} \breve{\chi}\left(\tilde{s}^{-1}\exp_{\widetilde{G}} T\right)M_{G(\tilde{s}),T}.$$

On choisit une forme volume η_s sur le supplémentaire canonique $(1-\mathrm{Ad}\,s)\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}(s)$ dans $\mathfrak{g}$. Ce choix détermine un polynôme $\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}$ sur $\mathfrak{g}(s)^*$ qui à $g \in \mathfrak{g}(s)^*$ associe le pfaffien relativement à η_s de la restriction à $(1-\mathrm{Ad}\,s)\mathfrak{g}$ de la forme alternée $\beta_g : (X,Y) \mapsto \langle g, [X,Y]\rangle$. On note $\partial_{\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}}$ l'opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathfrak{g}(s)$ associé.

L'orientation définie par η_s détermine, quant à elle, un nombre $\sigma(\tilde{s})$ (voir le numéro 9.5, formule (9.18)). La définition de ce nombre résulte des propriétés, en un élément elliptique e du groupe métalinéaire $\mathrm{ML}(V)$ d'un espace vectoriel V de dimension paire tel que $\det(1-e) \neq 0$, du caractère de la représentation métaplectique des sous-groupes métaplectiques de $\mathrm{ML}(V)$ contenant e (voir le numéro 4.5). Lorsque s est un élément de Γ, on a $\sigma(\tilde{s}) = \zeta(\tilde{s})$.

Enfin, on munit $\mathfrak{g}(s)$ de la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)}X$ telle que $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}X = \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)}X|\eta_s|$. On démontre alors l'égalité

$$\int_{G\setminus\mathfrak{g}^*_{G,\chi}} \theta^s_{\Omega,\chi}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)}X)\,\mathrm{d}\mu_{G,\chi}(\Omega) = \sigma(\tilde{s})v_{G,\chi,\tilde{s}^{-1}}\left(\partial_{\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}}(\varphi)\right), \quad \varphi \in \mathscr{S}\left(\mathfrak{g}(s)\right). \tag{1.16}$$

Cette égalité généralise la formule sommatoire de Poisson (1.9) : on dit que c'est une formule de Poisson–Plancherel. Elle entraîne bien la formule (1.14), car dans un voisinage assez petit de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$, on a $v_{G,\chi,\tilde{s}} = 0$, si $s \notin \Gamma$, et $v_{G,\chi,\tilde{s}} = \breve{\chi}(\tilde{s}^{-1})\delta_0$, si $s \in \Gamma$.

Pour démontrer la formule (1.16), on commence par calculer la transformée de Fourier de la distribution tempérée $v_{G,\chi,\tilde{s}}$. On définit $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$ comme l'ensemble des formes linéaires g fortement régulières pour $\mathfrak{g}(s)$ et qui vérifient la relation (1.10). On a $\mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi} := \mathfrak{g}(s)^* \cap \mathfrak{g}^*_{G,\chi} \subset \mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$ et ces deux ensembles sont des sous-variétés analytiques régulièrement plongées de $\mathfrak{g}(s)^*$. De plus, $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi} = \mathfrak{g}(s)^*_{G(\tilde{s})^{\sim s},\chi_s}$, où $G(\tilde{s})^{\sim s}$ est le revêtement métalinéaire de $G(\tilde{s})$ construit à l'aide de l'action adjointe de $G(\tilde{s})$ dans $(1 - \mathrm{Ad}\, s)\mathfrak{g}$ et χ_s un caractère de l'image inverse de Γ dans $G(\tilde{s})^{\sim s}$ naturellement associé à χ. La construction de la fonction généralisée G-invariante $m_{G,\chi}$ sur $\mathfrak{g}^*$ s'applique donc pour fournir la fonction généralisée tempérée canonique $G(\tilde{s})$-invariante $m_{G(\tilde{s})^{\sim},\chi_s}$, sur $\mathfrak{g}(s)^*$, notée plus simplement $m_{G(\tilde{s}),\chi}$, telle que, si $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g$ est une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}(s)^*$, $\mathrm{d}m_{G(\tilde{s}),\chi} := m_{G(\tilde{s}),\chi}\, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g$ soit une mesure de Radon concentrée sur $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$.

On montre alors qu'il existe un ouvert de Zariski G-invariant $\mathscr{V}$ de $\mathfrak{g}^*$ tel que, pour tout élément elliptique en bonne position s de G et $\tilde{s} \in p_G^{-1}(s)$, d'une part l'ensemble $\mathscr{V}_s$ des éléments de $\mathfrak{g}(s)^*$ qui sont u-équivalents dans $\mathfrak{g}^*$ (voir la Définition 5.5.1) à un élément de $\mathscr{V}$ soit un ouvert de Zariski de $\mathfrak{g}(s)^*$ dont l'intersection avec $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$ est de complémentaire $\mathrm{d}m_{G(\tilde{s}),\chi}$-négligeable et d'autre part il existe une fonction $q_{G,\chi,\tilde{s}}$, borélienne sur $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$, analytique sur $\mathscr{V}_s \cap \mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$ et telle que

(i) $|q_{G,\chi,\tilde{s}}|\, \mathrm{d}m_{G(\tilde{s}),\chi}$ soit une mesure de Radon tempérée sur $\mathfrak{g}(s)^*$,
(ii) on ait la formule suivante :

$$\hat{v_{G,\chi,\tilde{s}}} = q_{G,\chi,\tilde{s}} m_{G(\tilde{s}),\chi}. \tag{1.17}$$

Cette formule est une autre généralisation de la formule (1.9) ; c'est également une formule de Poisson–Plancherel.

Afin de pouvoir utiliser la formule (1.17) pour en déduire la formule de Poisson–Plancherel (1.16), nous devons exprimer la restriction $q_{G,\chi}(\tilde{s}, .)$ de la fonction $q_{G,\chi,\tilde{s}}$ à $\mathscr{V} \cap \mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi}$ à l'aide de la fonction de Plancherel ξ_G.

Le fait que l'action adjointe de $\widetilde{G}$ se relève en un morphisme $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ dans $\mathrm{ML}(\mathfrak{g})$, permet, pour tout $g \in \mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi}$, d'envoyer $\tilde{s}$ sur un élément $\phi_g(\tilde{s})$ de l'extension métaplectique $G(g)^g$ situé au-dessus de s (voir le numéro 8.2). On obtient alors l'expression remarquablement simple de $q_{G,\chi}(\tilde{s}, .)$ suivante :

$$q_{G,\chi}(\tilde{s}, g) = \big[G(g) : G(g)_0\Gamma\big]^{-1} \sum_{\tau \in X_{G,\chi}(g)} \dim \tau\, \xi_G(g,\tau)\, \mathrm{Tr}\big(\tau\big(\phi_g\big(\tilde{s}^{-1}\big)\big)\big), \tag{1.18}$$

pour tout $g \in \mathscr{V} \cap \mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi}$.

Lorsque G est semi-simple simplement connexe, le Lemme 33, qui est crucial pour établir nos formules, permet de ramener cette égalité à la relation (81) de [13, Paragraphe II.10].

Il résulte de l'égalité (1.18) et de la définition de la mesure $\mathrm{d}\mu_{G,\chi}$, que lorsque $s = 1$, les formules (1.17) et (1.16) sont identiques et se ramènent à la formule conjecturée par Vergne dans le cas des groupes unimodulaires de type I et démontrée par elle dans le cas semi-simple linéaire [36–38], puis par Dourmashkin dans le cas des groupes simples simplement connexes de type B_n [6]. Pour s quelconque et G semi-simple simplement connexe, elles sont démontrées par Duflo et Vergne dans [13].

D'autre part, la théorie de Fourier projective sur le groupe fini $G(g)/G(g)_0\Gamma$ permet de déduire de (1.18) une expression des fonctions de Plancherel $\xi_G(g,\tau)$ à l'aide des fonctions de Poisson–Plancherel $q_{G,\chi}(\tilde{s},.)$ (voir plus loin la formule (8.32) du Corollaire 8.11.1).

L'article s'achève par un errata à notre précédent travail [22] sur la formule du caractère. En effet, la démonstration donnée est par endroits incorrecte et nous expliquons comment il faut la modifier pour la rendre, nous l'espérons, juste et complète.

Nous tenons à remercier le rapporteur dont l'important travail a permis d'améliorer considérablement le texte de cet article. En particulier la démonstration présentée du Lemme 33, nettement plus simple que l'originale, lui est due.

2. Généralités et notations

2.1. Si t est un réel, on note $\operatorname{sign} t$ son signe, qui vaut 1, si $t > 0$, -1, si $t < 0$ et 0, si $t = 0$.

2.2. Si V est un espace vectoriel, on désigne par $S(V)$ l'algèbre symétrique sur V. Si V est de dimension finie sur $\mathbb{R}$, $S(V)$ s'identifie canoniquement à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur V. Si $p \in S(V)$, on note ∂_p l'opérateur différentiel correspondant.

2.3. Si A est un ensemble, on désigne par $\mathbb{1}_A$ sa fonction caractéristique et, s'il est fini, par $|A|$ son cardinal.

Si G est un groupe et H est un sous-groupe d'indice fini, on note $[G : H]$ l'indice de H dans G.

2.4. Par variété, on entend une variété $\mathscr{C}^\infty$. Les groupes de Lie et les variétés considérés sont toujours supposés séparables. Si V est une variété, on désigne par $\mathscr{D}(V)$ l'espace des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact sur V, muni de sa topologie habituelle. Soit $\mathrm{d}x$ une densité strictement positive sur V : $\mathrm{d}x$ est une mesure borélienne dont la restriction à chaque ouvert de carte s'exprime en coordonnées locales sous la forme $f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, où $\mathrm{d}\xi$ est la mesure de Lebesgue et f est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ strictement positive. Alors, l'application, $\varphi \mapsto \varphi\,\mathrm{d}x$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques de $\mathscr{D}(V)$ sur l'espace des densités $\mathscr{C}^\infty$ à support compact sur V. Une fonction généralisée sur V est un élément du dual topologique de ce dernier. Si T est une distribution sur V, on note $T/\mathrm{d}x$ la fonction généralisée définie par

$$\langle T/\mathrm{d}x, \varphi\,\mathrm{d}x\rangle = \langle T, \varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathscr{D}(V).$$

Si α est une densité $\mathscr{C}^\infty$ à support compact sur V, on note $\mathrm{d}\alpha$ la mesure complexe qu'elle définit : si $\phi \in \mathscr{D}(V)$, on a $\int_V \phi\,\mathrm{d}\alpha = \int_V (\phi\alpha)$ où, dans le membre de gauche, on intègre la densité à support compact $\phi\alpha$.

Soit G un groupe de Lie muni d'une action $\mathscr{C}^\infty$ sur $V : (x, v) \mapsto x.v$, $x \in G$, $v \in V$. On en déduit, par transport de structure, une action à gauche de G sur les densités (respectivement les fonctions) $\mathscr{C}^\infty$ à support compact et sur les fonctions généralisées (respectivement les distributions) sur V, $(x, \alpha) \mapsto {}^x\alpha$ et $(x, \theta) \mapsto {}^x\theta$. Ces actions sont telles que l'on ait

$$\langle {}^x\theta, \alpha\rangle = \langle \theta, {}^{x^{-1}}\alpha\rangle,$$

pour tout $x \in G$, toute densité (respectivement fonction) $\mathscr{C}^\infty$ à support compact α et toute fonction généralisée (respectivement distribution) θ sur V.

2.5. Soit X et Y deux variétés $\mathscr{C}^\infty$ et $f: X \to Y$ une submersion surjective. Alors, si α est une densité $\mathscr{C}^\infty$ à support compact sur X, il existe une unique densité $f_*\alpha$, $\mathscr{C}^\infty$ à support compact sur Y, telle que, pour toute fonction β, $\mathscr{C}^\infty$ sur Y, on ait :

$$\int_X \beta \circ f \,\mathrm{d}\alpha = \int_Y \beta \,\mathrm{d} f_*\alpha.$$

De plus, le support de $f_*\alpha$ est contenu dans l'image par f du support de α et, si β est une fonction mesurable sur Y, alors β est localement intégrable sur Y si et seulement si $\beta \circ f$ l'est sur X et, dans ce cas, l'égalité ci-dessus reste vraie. Enfin, l'application $\alpha \mapsto f_*\alpha$ est une surjection de l'espace des densités $\mathscr{C}^\infty$ à support compact sur X sur celui sur Y.

Pour ce qui précède, voir [35].

2.6. Si G est un groupe de Lie, on note G_0 sa composante neutre et Δ_G sa fonction module. Si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G, on note $\exp_G$, ou plus simplement exp, l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G. On note Ad (respectivement ad) la représentation adjointe de G (respectivement $\mathfrak{g}$) et Ad^* sa représentation coadjointe.

2.7. Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ muni d'une action $\mathscr{C}^\infty$ sur une variété V. On note $x.v$ le résultat de l'action de $x \in G$ sur $v \in V$. Si $v \in V$, on note $G(v)$ le stabilisateur de v dans G et $\mathfrak{g}(v)$ son algèbre de Lie. Si $x \in G$, on note V^x l'ensemble des points fixes de x dans V.

2.8. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle de dimension finie et V un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie. Si $X \in \mathfrak{g}$ et $v \in V$, on note encore $X.v$ le résultat de l'action de X sur v et on désigne encore par V^X le sous-espace de V constitué des éléments fixés, c'est à dire annulés, par X. De même, si $\mathfrak{j}$ est une partie de $\mathfrak{g}$ et A de V, on note $A^{\mathfrak{j}}$ le sous-ensemble des éléments de A annulés par $\mathfrak{j}$.

2.9. Si V (respectivement $\mathfrak{g}$) est un espace vectoriel réel (respectivement une algèbre de Lie réelle), on désigne par $V_{\mathbb{C}}$ (respectivement $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$) son complexifié (respectivement sa complexifiée). Si v est un vecteur de $V_{\mathbb{C}}$, on désigne par $\mathrm{Re}\, v$ (respectivement $\mathrm{Im}\, v$) sa partie réelle (respectivement imaginaire), qui sont des vecteurs de V tels que $v = \mathrm{Re}\, v + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, v$, et on définit son conjugué $\bar{v}$ comme étant le vecteur $\mathrm{Re}\, v - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, v$. Si $W \subset V_{\mathbb{C}}$ est un sous-espace vectoriel, on définit son conjugué $\overline{W}$ comme étant le sous-espace $\{\bar{v}, v \in W\}$. Si λ est une forme linéaire sur $V_{\mathbb{C}}$, on définit sa conjuguée $\bar{\lambda}$ comme étant la forme linéaire telle que $\bar{\lambda}(v) = \overline{\lambda(\bar{v})}$. Si V est muni d'une structure de $\mathfrak{g}$-module, celle-ci induit naturellement une structure de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module sur $V_{\mathbb{C}}$.

2.10. Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Si $X \in \mathfrak{g}$ et si φ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur G, on définit la fonction $R(X)\varphi$ en posant

$$R(X)\varphi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(x \exp tX)|_{t=0}, \quad x \in G.$$

On prolonge R à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ en posant

$$R(X + \mathrm{i}Y)\varphi = R(X)\varphi + \mathrm{i}R(Y)\varphi, \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

2.11. Supposons que $\mathfrak{g}$ soit une algèbre de Lie algébrique sur le corps $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et que V soit un $\mathfrak{g}$-module algébrique défini sur k. Si $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{g}$ est un tore algébrique défini sur k, on désigne par $\Delta_{\mathfrak{j},V}$ l'ensemble des poids non nuls de $\mathfrak{j}$ dans V et, si $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{j},V}$, on note V^α le sous-espace poids correspondant. Si $k = \mathbb{R}$ et si $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{j}_\mathbb{C},V_\mathbb{C}}$, alors $\bar{\alpha} \in \Delta_{\mathfrak{j}_\mathbb{C},V_\mathbb{C}}$ et $V_\mathbb{C}^{\bar{\alpha}} = \overline{V_\mathbb{C}^{\alpha}}$.

2.12. Si V est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, on note V^* son dual algébrique et on désigne par $\langle\, ,\rangle$ la dualité canonique entre V^* et V. Si E est une partie de V, $E^\perp$ désigne son orthogonal dans V^*.

On désigne par $\mathrm{GL}(V)$ (respectivement $\mathrm{SL}(V)$) le groupe linéaire (respectivement spécial linéaire) de V, vu comme un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$, et par $\mathrm{gl}(V)$ (respectivement $\mathrm{sl}(V)$) l'algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$ de ce dernier.

Soit $X \in \mathrm{gl}(V)$ et soit $W \subseteq U \subseteq V$ deux sous-espaces vectoriels de V invariants par X. Alors, on note $\det_{U/W} X$ le déterminant et $\mathrm{Tr}_{U/W} X$ la trace de l'endomorphisme de U/W induit par l'action de X.

2.13. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Si η est une forme volume sur V, on désigne par $|\eta|$ la mesure de Lebesgue correspondante. Elle est caractérisée par le fait que, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(V)$, l'on a

$$\int_V \varphi \,\mathrm{d}|\eta| = \int_V \varphi\eta,$$

sachant que pour intégrer la forme différentielle $\varphi\eta$ on munit V de l'orientation définie par η.

Maintenant, soit $\mathrm{d}v$ une mesure de Lebesgue sur V. On désigne par $\mathscr{S}(V)$ l'espace des fonctions de Schwartz sur V. Alors, l'application $\phi \mapsto \phi\,\mathrm{d}v$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques de $\mathscr{S}(V)$ sur l'espace des densités de Schwartz sur V.

Une fonction généralisée tempérée sur V est un élément du dual topologique de l'espace des densités de Schwartz.

Si $\varphi \in \mathscr{S}(V)$, on note $(\varphi \mathrm{d}v)\hat{}_V$ ou plus simplement $(\varphi\,\mathrm{d}v)\hat{}$ la transformée de Fourier de la densité $\varphi\,\mathrm{d}v$: c'est la fonction sur V^* définie par :

$$(\varphi\,\mathrm{d}v)\hat{}_V\,(l) = \int_V \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle l,v\rangle}\varphi(v)\,\mathrm{d}v.$$

On appelle mesure duale de la mesure $\mathrm{d}v$, la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}l$ sur V^* telle que l'on ait :

$$\varphi(0) = \int_{V^*} (\varphi\,\mathrm{d}v)\hat{}_V\,\mathrm{d}l, \quad \varphi \in \mathscr{S}(V).$$

Si T est une distribution tempérée sur V, sa transformée de Fourier $T\hat{}$ est la fonction généralisée tempérée sur V^* définie par

$$\bigl\langle T\hat{}, \varphi\,\mathrm{d}l\bigr\rangle = \int_V \biggl(\int_{V^*} \varphi(l)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle l,v\rangle}\,\mathrm{d}l\biggr)\,\mathrm{d}T(v), \quad \varphi \in \mathscr{S}\bigl(V^*\bigr).$$

2.14. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Soit $\| \ \|$ une norme sur V et soit $\mathrm{d}\beta$ une mesure borélienne sur V. Alors, il est bien connu que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un nombre $M > 0$ tel que $\int_V (1 + \|v\|)^{-M} \, \mathrm{d}\beta(v) < +\infty$,
(ii) pour toute fonction de Schwartz φ sur V, l'intégrale $\int_V \varphi \, \mathrm{d}\beta$ est absolument convergente.

Si ces conditions sont satisfaites, l'application $\varphi \mapsto \int_V \varphi \, \mathrm{d}\beta$ définit une distribution tempérée sur V. On dit alors que $\mathrm{d}\beta$ est une mesure positive tempérée sur V.

2.15. Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}} X$ une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}$. On dit que la mesure de Haar à gauche $\mathrm{d}_G x$ sur G et la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}} X$ sont tangentes, si $\mathrm{d}_G \exp X / \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} X$ est égal à 1 en $X = 0$. Il est clair que dans ces conditions, $\mathrm{d}_G x$ est uniquement déterminée par $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}} X$ et réciproquement.

Soit H un sous-groupe fermé de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et $\mathrm{d}_H x$ une mesure de Haar à gauche sur H tangente à la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}_{\mathfrak{h}} X$.

Il existe, à une constante multiplicative positive près, une unique forme linéaire non nulle positive G-invariante par translations à gauche sur l'espace des fonctions φ continues sur G, à support compact modulo H et vérifiant

$$\varphi(xy) = |\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \operatorname{Ad} y| \varphi(x), \quad x \in G, \ y \in H.$$

On appelle « mesure quotient » sur G/H une telle forme linéaire et on la note

$$\varphi \mapsto \int_{G/H} \varphi(x) \, \mathrm{d}_{G/H} \dot{x}.$$

En fait, il existe une unique mesure quotient $\mathrm{d}_{G/H} \dot{x}$ sur G/H telle que

$$\int_G \varphi(x) \, \mathrm{d}_G x = \int_{G/H} \left\{ \int_H \varphi(xy) |\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \operatorname{Ad} y|^{-1} \, \mathrm{d}_H y \right\} \mathrm{d}_{G/H} \dot{x}, \quad \varphi \in \mathscr{D}(G). \tag{2.1}$$

On dit alors que $\mathrm{d}_{G/H} \dot{x}$ est la mesure quotient de $\mathrm{d}_G x$ par $\mathrm{d}_H x$ et écrirons parfois $\mathrm{d}_{G/H} \dot{x} = \mathrm{d}_G x / \mathrm{d}_H x$ ou encore $\mathrm{d}_G x = \mathrm{d}_{G/H} \dot{x} \mathrm{d}_H x$. Lorsque G et H sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, toutes ces mesures sont des mesures de Lebesgue. La mesure quotient $\mathrm{d}_{G/H} \dot{x}$ déterminée par la formule (2.1) ne dépend que de la mesure de Lebesgue quotient $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}} X / \mathrm{d}_{\mathfrak{h}} X$ des mesures de Lebesgue tangentes à $\mathrm{d}_G X$ et $\mathrm{d}_H X$. On dit alors que les mesures $\mathrm{d}_{G/H} \dot{x}$ et $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}} X / \mathrm{d}_{\mathfrak{h}} X$ sont tangentes.

Supposons maintenant que K soit un sous-groupe fermé de H et que $\mathrm{d}_K x$ soit une mesure de Haar à gauche sur K. Alors les mesures quotients $\mathrm{d}_{G/K} \dot{x} = \mathrm{d}_G x / \mathrm{d}_K x$, $\mathrm{d}_{G/H} \dot{x} = \mathrm{d}_G x / \mathrm{d}_H x$ et $\mathrm{d}_{H/K} \dot{x} = \mathrm{d}_H x / \mathrm{d}_K x$ sont reliées par la formule :

$$\int_{G/K} \varphi(x) \, \mathrm{d}_{G/K} \dot{x} = \int_{G/H} \left\{ \int_{H/K} \varphi(xy) |_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \operatorname{Ad} y|^{-1} \, \mathrm{d}_{H/K} \dot{y} \right\} \mathrm{d}_{G/H} \dot{x}. \tag{2.2}$$

2.16. Soit H un groupe de Lie. On appellera ici revêtement de H, la donnée d'un couple (G, j) où G est un groupe de Lie et $j : G \to H$ est un morphisme surjectif de groupes de Lie dont le noyau est discret et central. Si $\ker j$ est un groupe fini d'ordre n, on dit que (G, j), ou plus simplement G, est un revêtement à n feuillets de H.

Supposons donc que (G, j) soit un revêtement du groupe de Lie H. Si x et y sont dans G, l'élément xyx^{-1} de G ne dépend que de $j(x) \in H$ et on le note $j(x)yj(x)^{-1}$. Alors, l'application $(x, y) \mapsto xyx^{-1}$ définit une action de H par automorphismes intérieurs dans G.

2.17. Un groupe presque algébrique réel G est la donnée d'un triplet $(G, j, \boldsymbol{G})$ tel que G soit un groupe de Lie réel séparable, $\boldsymbol{G}$ soit un sous-groupe algébrique affine défini sur $\mathbb{R}$ d'un certain $\mathrm{GL}(V)$, où V est un espace vectoriel défini sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, et j soit un morphisme de groupes de Lie de G dans le groupe $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$ des points réels de $\boldsymbol{G}$ tel que $j(G)$ soit un sous-groupe ouvert de $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$, dense dans $\boldsymbol{G}$ pour la topologie de Zariski, dont (G, j) soit un revêtement. Nous noterons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie algébrique sur $\mathbb{R}$ de $\boldsymbol{G}$, qui est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{gl}(V)$ et que nous appellerons l'algèbre de Lie de G. Il est clair que G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On a une notion évidente de sous-groupe presque algébrique d'un groupe presque algébrique : c'est un sous-groupe de Lie H de G tel que si on désigne par $\boldsymbol{H}$ l'adhérence de Zariski de $j(H)$ dans $\boldsymbol{G}$, le triplet $(H, j|_H, \boldsymbol{H})$ soit un groupe presque algébrique. Un tel sous-groupe est toujours fermé. Par exemple, la composante neutre G_0 de G est un sous-groupe presque algébrique : plus précisément, il s'agit du groupe presque algébrique $(G_0, j|_{G_0}, \boldsymbol{G}_0)$, où on désigne par $\boldsymbol{G}_0$ la composante neutre du groupe algébrique $\boldsymbol{G}$.

Un caractère réel du groupe presque algébrique réel G est dit rationnel s'il est le composé d'un caractère rationnel défini sur $\mathbb{R}$ de $\boldsymbol{G}$ avec j. Il est dit semi-rationnel si sa restriction à G_0 est de la forme Δ^{α}, où Δ est un caractère rationnel de G_0 et α est un réel. Par exemple, $\Delta_G^{1/2}$ est un caractère semi-rationnel de G.

Un morphisme de groupes presque algébriques réels de $(G, j, \boldsymbol{G})$ dans $(G', j', \boldsymbol{G}')$, est la donnée d'une paire $(a, \boldsymbol{a})$, où $a : G \to G'$ est un morphisme de groupes de Lie et $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}'$ est un morphisme de groupes algébriques tel que $j' \circ a = \boldsymbol{a} \circ j$. En fait, la paire $(a, \boldsymbol{a})$ est entièrement déterminée par a, de sorte que se donner un tel morphisme revient à se donner a. On dit que a est un isomorphisme de groupes presque algébriques si c'est un isomorphisme de groupes de Lie et si a^{-1} est un morphisme de groupes presque algébriques, auquel cas $\boldsymbol{a}$ est un isomorphisme de groupes algébriques.

Étant donné $\boldsymbol{G}$ un groupe algébrique affine défini sur $\mathbb{R}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{R}$, nous noterons ${}^u\boldsymbol{G}$ son radical unipotent, lequel est également défini sur $\mathbb{R}$. De même nous noterons ${}^u\mathfrak{g}$ le radical unipotent de $\mathfrak{g}$, qui est l'algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$ de ${}^u\boldsymbol{G}$.

Si $(G, j, \boldsymbol{G})$ est un groupe presque algébrique réel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, le sous-groupe ${}^u\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$ de $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$ se relève de manière unique en un sous-groupe de Lie connexe ${}^uG$ de G appelé le radical unipotent de G. Alors ${}^uG$ est le sous-groupe analytique fermé de G d'algèbre de Lie ${}^u\mathfrak{g}$ et c'est un sous-groupe presque algébrique de G. Enfin, nous appellerons facteur réductif de G, l'image réciproque par j du groupe des points réels d'un facteur réductif défini sur $\mathbb{R}$ de $\boldsymbol{G}$. Deux facteurs réductifs de G sont conjugués par un élément de ${}^uG$. Tout facteur réductif de G en est un sous-groupe presque algébrique et son algèbre de Lie est un facteur réductif de $\mathfrak{g}$. Enfin, G est isomorphe au produit semi-direct de l'un de ses facteurs réductifs par son radical unipotent.

2.18. Soit $(G, j, \boldsymbol{G})$ un groupe presque algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Rappelons que nous avons choisi une réalisation de $\boldsymbol{G}$ comme sous-groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$ d'un certain $\mathrm{GL}(V)$, de sorte que $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie algébrique réelle de $\mathrm{gl}(V)$. Si $X \in \mathfrak{g}$, il se décompose de manière unique dans $\mathrm{gl}(V)$ sous la forme $X = S + H + N$, avec S elliptique (semi-simple de valeurs propres imaginaires pures), H hyperbolique (semi-simple de valeurs propres réelles) et N nilpotent, commutant deux à deux. Comme $\mathfrak{g}$ est algébrique, S, H et N sont dans $\mathfrak{g}$. On pose $S = X_{\mathrm{ell}}$ (respectivement $H = X_{\mathrm{hyp}}$, $N = X_{\mathrm{nil}}$) et on l'appelle la partie elliptique (respectivement hyperbolique, nilpotente) de X.

Un élément g de G sera dit semi-simple si $j(g)$ est semi-simple, elliptique si de plus les valeurs propres de $j(g)$ sont de module 1, positivement hyperbolique s'il s'écrit $g = \exp H$ avec $H \in \mathfrak{g}$ hyperbolique et unipotent s'il s'écrit $g = \exp N$ avec $N \in \mathfrak{g}$ nilpotent. Si $g \in G$, il se décompose de manière unique dans G sous la forme $g = shu$ avec s elliptique, h positivement hyperbolique et u unipotent, commutant deux à deux. On pose $s = s(g)$ et on l'appelle la partie elliptique de g.

On note G_{ell} l'ensemble des éléments elliptiques de G.

Il est facile de voir que les notions que nous venons d'introduire ne dépendent pas du choix de la réalisation du groupe algébrique $\boldsymbol{G}$ comme sous-groupe d'un $\mathrm{GL}(V)$.

2.19. On garde les notations du numéro précédent. Pour $\eta > 0$, on note $\mathfrak{g}_\eta$ (respectivement $\mathfrak{g}^\eta$) l'ensemble des éléments $X \in \mathfrak{g}$ tels que pour toute valeur propre λ de X dans $V_{\mathbb{C}}$ (respectivement de $\mathrm{ad}\,X$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$), on ait $|\mathrm{Im}\,\lambda| < \eta$. Alors, $\mathfrak{g}_\eta$ (respectivement $\mathfrak{g}^\eta$) est un ouvert $\mathrm{Ad}\,G$-invariant de $\mathfrak{g}$ et on a $\mathfrak{g}_{\eta/2} \subset \mathfrak{g}^\eta$.

On pose $G_\eta = \exp \mathfrak{g}_\eta$. Si $0 < \eta \leqslant \pi$, G_η est un ouvert G-invariant de G.

Définition 2.19.1. Un ouvert $\mathscr{V}$ de $\mathfrak{g}$ sera dit G-elliptique, ou plus simplement elliptique lorsque aucune confusion n'est à craindre, s'il est $\mathrm{Ad}\,G$-invariant et si un élément de $\mathfrak{g}$ est dans $\mathscr{V}$ si et seulement si sa partie elliptique est dans $\mathscr{V}$.

Un ouvert $\mathscr{W}$ de G sera dit G-elliptique, ou plus simplement elliptique lorsque aucune confusion n'est à craindre, s'il est G-invariant et si un élément de G est dans $\mathscr{W}$ si et seulement si sa partie elliptique est dans $\mathscr{W}$.

Les ouverts G-elliptiques de $\mathfrak{g}$ (respectivement G) sont les ouverts d'une topologie, appelée la topologie G-elliptique, sur $\mathfrak{g}$ (respectivement G).

Par exemple, les ouverts $\mathfrak{g}_\eta$, $\eta > 0$, sont G-elliptiques et ils constituent une base de voisinages G-elliptiques de 0 dans $\mathfrak{g}$. Les ouverts $\mathfrak{g}^\eta$, $\eta > 0$, sont eux-aussi elliptiques.

De même, les ouverts G_η, $0 < \eta \leqslant \pi$, sont G-elliptiques et ils constituent une base de voisinages G-elliptiques de 1 dans G.

Si z est un nombre complexe non nul, on note $\mathrm{Arg}\,z$ la détermination de son argument comprise dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Soit $s \in G_{\mathrm{ell}}$. Désignons par $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (respectivement $\mu_1, \dots, \mu_l$) les valeurs propres distinctes de s dans $V_{\mathbb{C}}$ (respectivement de $\mathrm{Ad}\,s$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$). On définit les nombres strictement positifs $\epsilon'_{\mathfrak{g}}(s)$ et $\epsilon_G(s)$, que l'on note plus simplement $\epsilon'(s)$ et $\epsilon(s)$ lorsque aucune confusion n'est possible, en posant :

$$\epsilon'(s) = \inf\{|\mathrm{Arg}\,\mu_i|,\ \mu_i \neq 1; \pi\}, \qquad \epsilon(s) = \frac{1}{2}\inf\{|\mathrm{Arg}\,\lambda_i\lambda_j^{-1}|,\ i \neq j; \pi\}.$$

On a $\epsilon(s) \leqslant \frac{1}{2}\epsilon'(s)$, $\epsilon'(1) = \pi$ et $\epsilon(1) = \frac{\pi}{2}$. Enfin, pour $\eta > 0$, on pose $\mathfrak{g}^\eta(s) = \mathfrak{g}^\eta \cap \mathfrak{g}(s)$.

Soit alors $\mathscr{V} \subset \mathfrak{g}(s)$ un ouvert $G(s)$-elliptique. On considère l'application $\gamma : G \times \mathscr{V} \to G$ définie par

$$\gamma(x, X) = xs \exp X x^{-1}.$$

Avec ces notations, si $0 < \eta \leqslant \epsilon'(s)$ et si $\mathscr{V} \subset \mathfrak{g}^{\eta}(s)$ est un ouvert $G(s)$-elliptique, l'image de γ est un ouvert de G, noté $\mathscr{W}_G(s, \mathscr{V})$ ou plus simplement $\mathscr{W}(s, \mathscr{V})$, qui est G-elliptique, et γ induit une submersion de $G \times \mathscr{V}$ sur $\mathscr{W}(s, \mathscr{V})$. On note plus simplement $\mathscr{W}(s, \eta)$, l'ouvert $\mathscr{W}(s, \mathfrak{g}(s)_{\eta})$, $0 < \eta \leqslant \epsilon(s)$.

De plus, pour tout $0 < \eta \leqslant \epsilon(s)$, l'application γ induit un difféomorphisme de l'ouvert $G \times_{G(s)} \mathfrak{g}(s)_{\eta}$ du fibré vectoriel $G \times_{G(s)} \mathfrak{g}(s)$ sur $\mathscr{W}(s, \eta)$.

Les ouverts $\mathscr{W}(s, \eta)$, $0 < \eta \leqslant \epsilon(s)$ constituent une base de voisinages G-elliptiques de s dans G. Enfin, si $x \in G$ et si $0 < \eta \leqslant \epsilon(s)$, on a $x \in \mathscr{W}(s(x), \eta)$. En particulier, $(\mathscr{W}(s, \varepsilon(s)))_{s \in G_{\mathrm{ell}}}$ est un recouvrement de G par des ouverts elliptiques et une fonction généralisée sur G est entièrement déterminée par ses restrictions aux ouverts de ce recouvrement.

Pour ce qui précède, voir [14]. Le résultat facile suivant nous sera utile :

Lemme 1. *Soit $(G, j, \boldsymbol{G})$ un groupe presque algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Les ouverts G-invariants elliptiques de $\mathfrak{g}$ sont les images réciproques par la projection canonique des ouverts $G/{}^{u}G$-invariants elliptiques de $\mathfrak{g}/{}^{u}\mathfrak{g}$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{r}$ un facteur réductif de $\mathfrak{g}$ et $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{r}$ la projection parallèlement à ${}^{u}\mathfrak{g}$. Soit $\mathscr{V}$ un ouvert G-invariant de $\mathfrak{g}$. Il s'agit de montrer que $\mathscr{V}$ est elliptique si et seulement si $\mathscr{V} = \mathscr{V} + {}^{u}\mathfrak{g} = p(\mathscr{V}) + {}^{u}\mathfrak{g}$.

Tout d'abord, si $X \in \mathfrak{r}$, on a $p(X_{\mathrm{ell}}) = p(X)_{\mathrm{ell}}$, tandis qu'il existe $x \in {}^{u}G$ tel que $\operatorname{Ad} x.X_{\mathrm{ell}} \in \mathfrak{r}$. De plus, comme pour tous $x \in {}^{u}G$ et $X \in \mathfrak{g}$, $\operatorname{Ad} x.X \in X + {}^{u}\mathfrak{g}$, on voit que $p(X)_{\mathrm{ell}} = p(X_{\mathrm{ell}}) = \operatorname{Ad} x.X_{\mathrm{ell}}$. Il est alors clair que, si $X \in \mathfrak{g}$, X_{ell} est dans $\mathscr{V}$ si et seulement si $p(X)_{\mathrm{ell}}$ est dans $\mathscr{V} \cap \mathfrak{r}$. D'où le résultat. $\square$

2.20. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et $g \in \mathfrak{g}^*$. Alors, on désigne par β_g la forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}$ qui lui est canoniquement associée et qui est définie par $\beta_g(X, Y) = \langle g, [X, Y] \rangle$.

On suppose que G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Si $g \in \mathfrak{g}^*$, on note Ω_g l'orbite coadjointe de g sous G.

Si $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ est une orbite coadjointe de G, elle est munie d'une structure symplectique naturelle définie par la 2-forme différentielle β_Ω telle que $\beta_\Omega(X.g, Y.g) = \beta_g(X, Y)$, $X, Y \in \mathfrak{g}$. En particulier, Ω est de dimension paire, disons $2k$. Alors, Ω supporte une mesure invariante canonique, $\mathrm{d}\beta_\Omega = \frac{1}{(2\pi)^k k!} |\wedge^k \beta_\Omega|$, dite mesure de Liouville. Plus généralement, si Ω est une réunion finie de G-orbites coadjointes, elle supporte une mesure invariante canonique $\mathrm{d}\beta_\Omega$ (appelée encore mesure de Liouville) dont la restriction à chaque G-orbite qu'elle contient est la mesure de Liouville de cette dernière.

Soit $s \in G$ un élément semi-simple. Alors, Ω^s, l'ensemble des points fixes de s dans Ω, est une réunion finie de $G(s)$-orbites coadjointes (voir, par exemple, [14, Lemme 63]), de sorte que la mesure de Liouville $\mathrm{d}\beta_{\Omega^s}$ est bien définie.

2.21. Si Γ est un groupe abélien localement compact, nous désignons par $\Gamma\hat{}$ son groupe dual. Si Γ' est un sous-groupe de Γ, on désigne par $\Gamma'^{\perp}$ le sous-groupe de $\Gamma\hat{}$ constitué des caractères triviaux sur Γ'.

3. Revêtements métaplectiques

3.1. Soit $V = (V, \beta)$ un espace symplectique réel, i.e. V est en espace vectoriel réel non nul de dimension finie muni d'une forme symplectique β. On désigne par $\mathrm{Sp}(V, \beta)$ ou plus simplement par $\mathrm{Sp}(V)$, le groupe symplectique de V et par $\mathrm{Mp}(V, \beta)$ ou $\mathrm{Mp}(V)$ le groupe métaplectique correspondant qui est le revêtement connexe à deux feuillets du précédent. On note $\mathrm{sp}(V, \beta)$ ou plus simplement $\mathrm{sp}(V)$ l'algèbre de Lie commune à $\mathrm{Sp}(V)$ et $\mathrm{Mp}(V)$. On note $p : \mathrm{Mp}(V) \to \mathrm{Sp}(V)$ le morphisme de revêtement et on désigne par ϵ l'élément non trivial de $\ker p$. Lorsque $V = 0$, on convient que $\mathrm{Sp}(V)$ est le groupe trivial et que $\mathrm{Mp}(V)$ est le groupe à deux éléments $\{1, \epsilon\}$. Alors, $(\mathrm{Mp}(V), p, \mathrm{Sp}(V))$ est un groupe presque algébrique réel.

Supposons que U soit un sous-espace symplectique de V. On identifie $\mathrm{Sp}(U)$ avec le sous-groupe de $\mathrm{Sp}(V)$ constitué des éléments agissant trivialement dans l'orthogonal $U^{\perp}$ de U et stabilisant donc U. Alors $p : p^{-1}(\mathrm{Sp}(U)) \to \mathrm{Sp}(U)$ est un revêtement de $\mathrm{Sp}(U)$ canoniquement isomorphe au revêtement métaplectique. Autrement dit l'injection considérée de $\mathrm{Sp}(U)$ dans $\mathrm{Sp}(V)$ se relève de manière canonique en une injection de $\mathrm{Mp}(U)$ dans $\mathrm{Mp}(V)$.

Avec ces notations, tout élément x de $\mathrm{Mp}(V)$ laissant stable U s'écrit sous la forme $x = yy'$ avec $y \in \mathrm{Mp}(U)$ et $y' \in \mathrm{Mp}(U^{\perp})$. De plus, si $x = zz'$ est une autre décomposition avec $z \in \mathrm{Mp}(U)$ et $z' \in \mathrm{Mp}(U^{\perp})$, il existe $t \in \{1, \epsilon\}$ tel que $z = yt$ et $z' = y't$.

3.2. Un lagrangien $\ell \subset V_{\mathbb{C}}$ est dit totalement complexe, si $\ell \cap \bar{\ell} = 0$, et positif, si la forme hermitienne définie sur ℓ par $(v, w) \mapsto \mathrm{i}\beta(v, \bar{w})$ est positive.

Nous rappelons la fonction δ, notée également δ^{β} s'il est nécessaire de préciser, définie sur le groupe métaplectique $\mathrm{Mp}(V)$ par Duflo (voir, par exemple, [10, I.5]). Elle vérifie les propriétés suivantes qui la caractérisent entièrement :

(i) si $x \in \mathrm{Mp}(V)$, $\delta(x)$ ne dépend que de la partie elliptique de x,
(ii) soit $T \subset \mathrm{Mp}(V)$ un tore compact d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ et soit $\ell \subset V_{\mathbb{C}}$ un lagrangien T-invariant et positif. Alors, $\delta|_T$ est le caractère de T de différentielle

$$\rho_{\ell}(X) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}_{\ell} \operatorname{ad} X, \qquad X \in \mathfrak{t},$$

(iii) $\delta(\epsilon) = -1$ (cette condition est conséquence des deux autres si $\dim V > 0$).

3.3. On se donne un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{R}$ muni d'une forme bilinéaire alternée β et on note encore β la forme symplectique induite par cette dernière sur $V/\ker\beta$.

On suppose que le groupe de Lie H agit dans l'espace V au travers d'automorphismes laissant invariante la forme β ; autrement dit on dispose d'un morphisme de groupes de Lie $\psi : H \to \mathrm{GL}(V)$ qui induit naturellement un morphisme $\psi : H \to \mathrm{Sp}(V/\ker\beta)$. On désigne alors par H^{β} ou aussi H^{V} l'extension métaplectique correspondante : H^{β} est le sous-groupe de $H \times \mathrm{Mp}(V/\ker\beta)$ constitué des couples (x, y) tels que $\psi(x) = p(y)$. Muni de la projection canonique sur H, encore notée p, H^{β} est un revêtement à deux feuillets, pas forcément connexe, de H. On désigne encore par ϵ l'élément non trivial du noyau de p.

On note δ^β ou δ^V la fonction sur H^β ou H^V remontée, via la deuxième projection de H^β ou H^V sur $\mathrm{Mp}(V/\ker\beta)$, de la fonction de Duflo sur le groupe métaplectique introduite au numéro précédent.

Il est clair que si U est un sous-espace de V contenu dans $\ker\beta$, on a $H^V = H^{V/U}$ et $\delta^V = \delta^{V/U}$.

3.4. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et $g \in \mathfrak{g}^*$. On reprend les notations du numéro 2.20. Le noyau de β_g est le stabilisateur $\mathfrak{g}(g)$ de g dans $\mathfrak{g}$ et β_g induit une forme symplectique, encore notée β_g, sur l'espace quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)$. Soit H un groupe de Lie agissant dans $\mathfrak{g}$ au moyen d'automorphismes et dont l'action contragrédiente fixe g. Alors l'action de H dans $\mathfrak{g}$ passe au quotient en une action au moyen d'automorphismes symplectiques dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)$. D'après le paragraphe précédent, on peut associer à l'action de H dans $\mathfrak{g}$ l'extension métaplectique $H^g = H^{\beta_g}$ de H, ainsi que la fonction $\delta^g = \delta^{\beta_g}$ sur H^g.

3.5. Nous aurons besoin de propriétés de la fonction δ. Mais avant de les énoncer, nous devons relier celle-ci à la représentation métaplectique. Soit donc (V,β) un espace symplectique, $\mathfrak{n}_V = V \oplus \mathbb{R}E$ l'algèbre de Lie de Heisenberg correspondante dont le centre est $\mathbb{R}E$ et dans laquelle le crochet de deux éléments de V est donné par $[u,v] = \beta(u,v)E$ et N_V le groupe de Heisenberg correspondant qui est le groupe unipotent d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_V$. Le groupe métaplectique $\mathrm{Mp}(V)$ agit naturellement par automorphismes dans N_V à l'aide de la formule

$$x.\exp(v+tE) = \exp(x.v+tE), \quad x \in \mathrm{Mp}(V),\ v \in V,\ t \in \mathbb{R}.$$

Soit E^* la forme linéaire sur $\mathfrak{n}_V$, nulle sur V et prenant la valeur 1 sur E et soit T_V la représentation unitaire irréductible de N_V qui lui correspond, via la méthode des orbites de Kirillov, et dont on choisit une réalisation dans l'espace de Hilbert $\mathscr{H}_V$. Alors, il existe une unique représentation S_V de $\mathrm{Mp}(V)$ dans $\mathscr{H}_V$, appelée représentation métaplectique, telle que

$$S_V(x)T_V(y)S_V(x)^{-1} = T_V(x.y), \quad x \in \mathrm{Mp}(V),\ y \in N_V.$$

Soit $\ell \subset V_{\mathbb{C}}$ un lagrangien positif. On désigne par D le sous-groupe unipotent de N_V d'algèbre de Lie $\ell \cap \bar{\ell} \oplus \mathbb{R}E$. Soit $\mathscr{H}_{\ell,\infty}$ l'espace préhilbertien des fonctions φ, $\mathscr{C}^\infty$ sur N_V, telles que

(i) $R(X)\varphi = 0$, $X \in \ell$,
(ii) $\varphi(x\exp tE) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\varphi(x)$, $x \in N_V$, $t \in \mathbb{R}$,
(iii) $\int_{N_V/D} |\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}\dot{x} < +\infty$.

On désigne alors par $\mathscr{H}_\ell$ l'espace de Hilbert complété de $\mathscr{H}_{\ell,\infty}$ et par T_ℓ la représentation unitaire de N_V dans $\mathscr{H}_\ell$ par translations à gauche. Alors T_ℓ est équivalente à la représentation T_V et on choisit $U_\ell : \mathscr{H}_\ell \to \mathscr{H}_V$ un opérateur d'entrelacement.

Maintenant, soit $x \in \mathrm{Sp}(V)$ et soit $\ell \subset V_{\mathbb{C}}$ un lagrangien positif stabilisé par x. On définit l'opérateur unitaire $S_\ell(x)$ dans $\mathscr{H}_\ell$ en posant

$$\big(S_\ell(x)\varphi\big)(y) = |\det{}_{V/\ell\cap\bar{\ell}}\, x|^{-\frac{1}{2}}\varphi(x^{-1}.y), \quad \varphi \in \mathscr{H}_\ell,\ y \in N_V. \tag{3.1}$$

Alors, on a

$$S_\ell(x)T_\ell(y)S_\ell(x)^{-1} = T_\ell(x.y), \quad y \in N_V.$$

Si $x \in \mathrm{Mp}(V)$, on pose $S_\ell(x) = S_\ell(p(x))$. Dans ces conditions, l'opérateur

$$S'_V(x) = S'_V\big(p(x)\big) = U_\ell S_\ell(x) U_\ell^{-1}$$

est indépendant du choix de ℓ et l'on a

$$S_V(x) = \delta^V(x) S'_V(x), \quad x \in \mathrm{Mp}(V). \tag{3.2}$$

Enfin, S'_V est une représentation projective de $\mathrm{Sp}(V)$. Pour ce qui précède, voir [10, II].

3.6. Les résultats de ce numéro et du suivant réinterprètent ceux de [9, Lemmes II.8 et II.9]. On reprend les notations du numéro 3.3 et on se donne un sous-espace vectoriel H-invariant U de V tel que l'orthogonal $U^\perp$ de U pour β soit contenu dans $U + \ker\beta$, ce qui s'écrit aussi $U^\perp \subset U + V^\perp$. On munit U de la restriction de la forme β et on considère alors le produit fibré $H^V \times_H H^U$, qui est le sous-groupe de $H^V \times H^U$ constitué des couples (x, x') tels que x et x' aient même projection dans H.

Lemme 2. *L'application $(x, x') \mapsto \delta^V(x)\delta^U(x')^{-1}$ est un caractère unitaire du groupe $H^V \times_H H^U$.*

Démonstration. Il est clair que l'on peut supposer que $V^\perp = 0$. On considère l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{n}_V$ et le groupe de Heisenberg correspondant N_V introduits au numéro précédent. Alors, $\mathfrak{n}_U = U \oplus \mathbb{R}E$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{n}_V$ et $N_U = \exp(\mathfrak{n}_U)$ est le sous-groupe unipotent de N_V d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_U$. De plus, $U^\perp$ est un idéal de $\mathfrak{n}_U$, $U_1 = U/U^\perp$ est un espace symplectique et le groupe de Heisenberg N_{U_1} est canoniquement isomorphe au groupe quotient $N_U/\exp(U^\perp)$.

Pour simplifier, on pose $(T, \mathscr{H}) = (T_V, \mathscr{H}_V)$ et $(T_1, \mathscr{H}_1) = (T_{U_1}, \mathscr{H}_{U_1})$. La représentation T_1 se remonte alors en une représentation unitaire irréductible de N_U et, comme U contient des sous-espaces lagrangiens de V, le théorème d'induction par étage montre que l'on a $T = \mathrm{Ind}_{N_U}^{N_V} T_1$. Dans la suite de cette démonstration, nous réaliserons la représentation $(T, \mathscr{H})$ comme cette induite.

Nous notons simplement S' (respectivement S) la représentation projective S'_V (respectivement la représentation métaplectique S_V) de $\mathrm{Sp}(V)$ (respectivement $\mathrm{Mp}(V)$) introduite au numéro précédent et réalisée dans l'espace $\mathscr{H}$ ci-dessus de T. De même, nous notons S'_1 (respectivement S_1) le même objet relatif au groupe $\mathrm{Sp}(U_1)$ (respectivement $\mathrm{Mp}(U_1)$) et réalisé dans $\mathscr{H}_1$. Enfin, nous notons de la même façon les représentations projectives S' et S'_1, vues comme des représentations de H et la représentation S (respectivement S_1) vue comme une représentation de H^V (respectivement H^U).

Maintenant, soit $x \in H$ et P un opérateur unitaire dans $\mathscr{H}_1$ tel que $PT_1(y)P^{-1} = T_1(x.y)$, $y \in N_U$. Il existe un réel $c > 0$ tel que la formule $(P^\sim\varphi)(y) = cP\varphi(x^{-1}.y)$, $\varphi \in \mathscr{H}$ et $y \in N_V$, définisse un opérateur unitaire dans $\mathscr{H}$; celui-ci vérifie de plus $P^\sim T(y)P^{\sim-1} = T(x.y)$, $y \in N_V$. Avec cette notation, l'application $x \mapsto S_1(x)^\sim$ définit une représentation unitaire de H^U dans l'espace $\mathscr{H}$.

Cela étant, soit $x \in H$ et soit ℓ un lagrangien positif de V, stabilisé par x et contenu dans $U_\mathbb{C}$ (il en existe). Alors, $\ell_1 = \ell/U_\mathbb{C}^\perp$ est un lagrangien de U_1, positif et stabilisé par x, et il est clair que

$$T_\ell = \mathrm{Ind}_{N_U}^{N_V} T_{\ell_1},$$

où l'on voit T_{ℓ_1} comme une représentation de N_U. En fait, on obtient un opérateur d'entrelacement canonique de l'espace $\mathscr{H}'_\ell$ de $\mathrm{Ind}_{N_U}^{N_V} T_{\ell_1}$ sur $\mathscr{H}_\ell$ en posant, pour $\varphi \in \mathscr{H}'_\ell$: $I\varphi(x) = \varphi(x)(1)$, $x \in N_V$. D'autre part, on dispose des opérateurs $S_\ell(x)$ et $S_{\ell_1}(x)$ dans les espaces respectifs $\mathscr{H}_\ell$ et $\mathscr{H}_{\ell_1}$. Grâce à la relation (3.1), on vérifie facilement que $S_\ell(x) = I S_{\ell_1}(x)\tilde{}\, I^{-1}$.

On déduit immédiatement de ces considérations que, pour tout $x \in H$, on a

$$S'(x) = S'_1(x)\tilde{}, \quad x \in H. \tag{3.3}$$

Soit donc (x, x') un élément de $H^V \times_H H^U$ et désignons par y la projection commune de x et x' sur H. Il résulte de (3.2) et (3.3), que l'on a

$$\begin{aligned} S(x) &= \delta^V(x) S'(y), \\ S_1(x')\tilde{} &= \delta^U(x') S'_1(y)\tilde{} = \delta^U(x') S'(y), \end{aligned}$$

de sorte qu'on obtient

$$S(x) = \delta^V(x)\delta^U(x')^{-1} S_1(x')\tilde{}.$$

D'où le lemme. □

3.7. On conserve les notations du numéro 3.3. On se donne un sous-espace H-invariant U de V et on pose $W = U^\perp$. Alors, W est également H-invariant, si bien que l'on peut considérer le double revêtement métaplectique $(H^U)^W$ de H, ainsi que le produit fibré $H^V \times_H (H^U)^W$. Les fonctions δ^U et δ^W se remontent en des fonctions sur le double revêtement $(H^U)^W$ notées de même.

Lemme 3. *L'application* $(x, x') \mapsto \delta^V(x)\delta^U(x')^{-1}\delta^W(x')^{-1}$ *est un caractère du groupe* $H^V \times_H (H^U)^W$.

Démonstration. En utilisant le Lemme 2, on se ramène au cas où $U + W = V$. On suppose également que $V^\perp = 0$. On a donc $V = U \oplus W$, U et W étant des sous-espaces symplectiques orthogonaux H-invariants de V. On a alors $N_V = N_U N_W$ et la représentation T_V de N_V est équivalente à la représentation dans $\mathscr{H}_U \otimes \mathscr{H}_W$ donnée par $T_V(xy) = T_U(x) \otimes T_W(y)$, $x \in N_U$, $y \in N_W$.

On note de même les représentations projectives de H induites par S'_V, S'_U et S'_W, ainsi que la représentation de H^V (respectivement $(H^U)^W$) induite par la représentation métaplectique S_V (respectivement S_U, S_W).

Il est alors immédiat que, si $x \in H$, on a

$$S'_V(x) = S'_U(x) \otimes S'_W(x).$$

Par suite, étant donné $(x, x') \in H^V \times_H (H^U)^W$ et si y désigne la projection commune de x et x' sur H, il vient

$$\delta^W(x')\delta^U(x')\delta^V(x)^{-1} S_V(x) = \delta^W(x')\delta^U(x') S'_U(y) \otimes S'_W(y) = S_U(x') \otimes S_W(x').$$

D'où le lemme. □

4. Revêtements métalinéaires et caractères de tores

4.1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et soit $\mathrm{ML}(V)$ le groupe métalinéaire de V : c'est le revêtement à deux feuillets du groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$ introduit dans [14, Section 4.3]. Soit $p:\mathrm{ML}(V) \to \mathrm{GL}(V)$ la projection canonique. Alors $\ker p$ est un sous-groupe central à deux éléments, notés 1 et ϵ, de $\mathrm{ML}(V)$ et $(\mathrm{ML}(V), p, \mathrm{GL}(V))$ est un groupe presque algébrique réel.

Lorsque $\dim V = 0$, $\mathrm{ML}(V)$ est le groupe à deux éléments $\{1, \epsilon\}$. Lorsque $\dim V > 0$, on peut obtenir une réalisation de $\mathrm{ML}(V)$ de la manière suivante. On introduit l'espace $\widetilde{V} = V \oplus \mathbb{R}\tilde{e}$ ainsi que $p:\mathrm{DL}(\widetilde{V}) \to \mathrm{SL}(\widetilde{V})$ le revêtement connexe à deux feuillets du groupe spécial linéaire de $\widetilde{V}$. On réalise un plongement naturel du groupe $\mathrm{GL}(V)$ dans $\mathrm{SL}(\widetilde{V})$ au moyen de l'application qui envoie $x \in \mathrm{GL}(V)$ sur l'élément de $\mathrm{SL}(\widetilde{V})$ qui stabilise V et $\mathbb{R}\tilde{e}$ et qui agit comme x dans V. Alors le groupe métalinéaire de V est $\mathrm{ML}(V) = p^{-1}(\mathrm{GL}(V))$ muni de sa projection naturelle p sur $\mathrm{GL}(V)$.

On note $\mathrm{GL}^+(V)$ (respectivement $\mathrm{GL}^-(V)$) le sous-groupe (respectivement sous-ensemble) de $\mathrm{GL}(V)$ constitué des éléments de déterminant positif (respectivement négatif) et $\mathrm{ML}^+(V)$ (respectivement $\mathrm{ML}^-(V)$) son image réciproque dans $\mathrm{ML}(V)$.

Supposons que V soit la somme directe de deux de ses sous-espaces, V_1 et V_2. Pour $\{j,k\} = \{1,2\}$, on identifie $\mathrm{GL}(V_j)$ avec le sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ constitué des éléments agissant trivialement dans V_k et stabilisant V_j. Alors $p: p^{-1}(\mathrm{GL}(V_j)) \to \mathrm{GL}(V_j)$ est un revêtement de $\mathrm{GL}(V_j)$ canoniquement isomorphe au revêtement métalinéaire. Autrement dit l'injection considérée de $\mathrm{GL}(V_j)$ dans $\mathrm{GL}(V)$ se relève de manière canonique en une injection de $\mathrm{ML}(V_j)$ dans $\mathrm{ML}(V)$.

Avec ces notations, tout élément x de $\mathrm{ML}(V)$ laissant stable V_1 et V_2 s'écrit sous la forme $x = x_1x_2$ avec $x_j \in \mathrm{ML}(V_j)$, $j = 1,2$. De plus, si $x = x_1'x_2'$ est une autre décomposition avec $x_j' \in \mathrm{ML}(V_j)$, $j = 1,2$, il existe $t \in \{1,\epsilon\}$ tel que $x_j' = x_jt$, $j = 1,2$.

Soit $a: V \to V'$ un isomorphisme d'espace vectoriels. Il se prolonge naturellement en un isomorphisme $\tilde{a}: \widetilde{V} \to \widetilde{V}'$ tel que $\tilde{a}(\tilde{e}) = \tilde{e}$. Alors l'application $x \mapsto \tilde{a}x\tilde{a}^{-1}$ induit un isomorphisme de groupes de Lie de $\mathrm{SL}(\widetilde{V})$ sur $\mathrm{SL}(\widetilde{V}')$, lequel se relève de manière unique en un isomorphisme de $\mathrm{DL}(\widetilde{V})$ sur $\mathrm{DL}(\widetilde{V}')$. Ce dernier se restreint en un isomorphisme de groupes de Lie de $\mathrm{ML}(V)$ sur $\mathrm{ML}(V')$ et, si x est un élément de $\mathrm{ML}(V)$, on note axa^{-1} son image par cet isomorphisme. Il est clair que l'on a

$$p\big(axa^{-1}\big) = ap(x)a^{-1}, \quad x \in \mathrm{ML}(V). \tag{4.1}$$

4.2. On a le résultat suivant dont la démonstration est immédiate.

Lemme 4. *Supposons que* $\dim V \geqslant 2$. *Soit* $T \subset \mathrm{ML}(V)$ *un tore compact maximal,* $\mathfrak{t}$ *son algèbre de Lie,* $\Delta^+ \subset \Delta_{\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}}}$ *un ensemble de poids positifs, i.e. une partie de* $\Delta_{\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}}}$ *telle que* $\Delta_{\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}}} = \Delta^+ \sqcup -\Delta^+$, *et* $\rho_{\Delta^+} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+} \alpha|_{\mathfrak{t}}$.

Alors, ρ_{Δ^+} *est la différentielle d'un unique caractère, noté* ζ_{Δ^+} *du tore* T. *De plus,* $\epsilon \in T$ *et* $\zeta_{\Delta^+}(\epsilon) = -1$.

Lorsque $\dim V \leqslant 1$, l'unique tore compact de $\mathrm{ML}(V)$ est trivial. Alors, ζ_{Δ^+} désigne le caractère non trivial du sous-groupe $\{1,\epsilon\}$ de $\mathrm{Mp}(V)$.

Corollaire 4.2.1. *On suppose que V est non nul de dimension paire et on se donne $s \in \mathrm{ML}(V)$ tel que $p(s) = -\mathrm{Id}$. Alors, on a*

$$xsx^{-1} = \begin{cases} s, & si\ x \in \mathrm{GL}^{+}(V), \\ \epsilon s, & si\ x \in \mathrm{GL}^{-}(V). \end{cases} \tag{4.2}$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de [14, point 6 de la proposition]. Néanmoins, nous en donnons une démonstration directe. Il est clair que l'application $x \mapsto xsx^{-1}$ est constante sur les composantes connexes de $\mathrm{GL}(V)$ et donc que $xsx^{-1} = s$, $s \in \mathrm{GL}^{+}(V)$.

Maintenant, écrivons $V = V_1 \oplus V_2$ avec $\dim V_1 = 2$ et, comme dans le numéro 4.1, $s = s_1 s_2$ avec $s_j \in \mathrm{ML}(V_j)$, $j = 1, 2$. Alors, remarquant que $\mathrm{GL}^{-}(V_1)$ est contenu dans $\mathrm{GL}^{-}(V)$ et agit trivialement dans $\mathrm{ML}^{+}(V_2)$, puisqu'il centralise son algèbre de Lie, on se ramène à montrer la deuxième égalité de (4.2) lorsque $\dim V = 2$. Soit donc (e_1, e_2) une base de V. On peut supposer que $s = \exp_{\mathrm{ML}(V)} \pi W$ où $W \in \mathrm{gl}(V)$ est tel que $We_1 = -e_2$ et $We_2 = e_1$. Alors, $\mathfrak{t} = \mathbb{R}W$ est l'algèbre de Lie d'un tore compact maximal T de $\mathrm{ML}(V)$ et si α est la forme linéaire sur $\mathfrak{t}$ telle que $\alpha(W) = \mathrm{i}$, $\Delta^{+} = \{\alpha\}$ est un ensemble de poids positifs de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ dans $V_{\mathbb{C}}$. Soit enfin $x \in \mathrm{GL}^{-}(V)$ défini par $xe_1 = -e_1$ et $xe_2 = e_2$. Comme $xWx^{-1} = -W$, on a $\zeta_{\Delta^{+}}(xsx^{-1}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -\zeta_{\Delta^{+}}(s)$, si bien que $xsx^{-1} = \epsilon s$. □

4.3. Maintenant, soit β une forme bilinéaire alternée sur V. On note $\mathrm{GL}(V)(\beta)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ constitué des éléments qui laissent β invariante et qui agissent trivialement dans $\ker\beta$. Soit W un sous-espace supplémentaire de $\ker\beta$ dans V : c'est un espace symplectique pour la restriction de β à W. Alors, tout élément x de $\mathrm{GL}(V)(\beta)$ s'écrit dans la décomposition en somme directe $V = \ker\beta \oplus W$ sous la forme

$$x = \begin{pmatrix} 1_{\ker\beta} & x_{W,\ker\beta} \\ 0 & x_W \end{pmatrix},$$

où $x_{W,\ker\beta}$ est un élément de $\mathrm{Hom}(W, \ker\beta)$ et x_W est un élément du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(W)$. En particulier, $\mathrm{GL}(V)(\beta)$ est un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$ dont le radical unipotent est (canoniquement isomorphe à) $\mathrm{Hom}(W, \ker\beta)$ et dont un facteur réductif est $\mathrm{Sp}(W)$.

Tout élément x de $\mathrm{GL}(V)(\beta)$ induit par passage au quotient un élément $\phi_\beta(x)$ du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(V/\ker\beta)$. Alors, ϕ_β est un morphisme surjectif de groupes algébriques de $\mathrm{GL}(V)(\beta)$ sur $\mathrm{Sp}(V/\ker\beta)$ dont le noyau est le radical unipotent $\mathrm{Hom}(W, \ker\beta)$.

On désigne par $\mathrm{ML}(V)(\beta)$ l'image inverse de $\mathrm{GL}(V)(\beta)$ dans $\mathrm{ML}(V)$.

Lemme 5. *Avec les notations précédentes,* $\mathrm{ML}(V)(\beta)$ *est un revêtement à deux feuillets de* $\mathrm{GL}(V)(\beta)$*, connexe si la forme β n'est pas triviale, et le morphisme ϕ_β se relève de manière unique en un morphisme, encore noté ϕ_β, de* $\mathrm{ML}(V)(\beta)$ *dans* $\mathrm{Mp}(V/\ker\beta)$ *tel que $\phi_\beta(\epsilon) = \epsilon$. De plus, pour tout sous-espace W supplémentaire de* $\ker\beta$ *dans V, l'image inverse de* $\mathrm{Sp}(W)$ *dans* $\mathrm{ML}(V)$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathrm{Mp}(W)$.

Démonstration. On peut supposer que β est non triviale. Dans ce cas, le groupe symplectique n'ayant à isomorphisme qu'un seul revêtement connexe à deux feuillets, il suffit de démontrer, qu'avec les notations de la dernière assertion du lemme, l'image inverse de $\mathrm{Sp}(W)$ dans $\mathrm{ML}(V)$ est connexe ou, de manière équivalente, que l'image inverse dans $\mathrm{ML}(V)$ d'un tore compact maximal de $\mathrm{Sp}(W)$ est connexe. Soit donc $H \subset \mathrm{Sp}(W)$ un tore compact maximal, $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie, $T \subset \mathrm{GL}(V)$ un tore compact maximal contenant H et $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie. Soit $\ell \subset W_{\mathbb{C}}$ un lagrangien H-invariant totalement complexe et positif. Comme les éléments de $\mathfrak{t}$ commutent à ceux de $\mathfrak{h}$ et comme les poids de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ dans $W_{\mathbb{C}}$ sont tous de multiplicité 1, il existe un ensemble de poids positifs Δ^+ dans $\Delta_{\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}}}$ tel que

$$\ell = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+, \alpha|_{\mathfrak{h}} \neq 0} V_{\mathbb{C}}^{\alpha}.$$

Par suite, avec les notations du Lemme 4, on a

$$\rho_{\Delta^+}(X) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}_{\ell} \operatorname{ad} X, \quad X \in \mathfrak{h},$$

de sorte que, si $\widetilde{H}$ désigne l'image inverse de H dans $\mathrm{ML}(V)$, $\zeta_{\Delta^+|\widetilde{H}}$ est un caractère dont la différentielle est $\frac{1}{2} \mathrm{Tr}_{\ell} \operatorname{ad}$. Or, il résulte de [10, I.5] que l'image inverse de H dans $\mathrm{Mp}(W)$ est canoniquement isomorphe au tore

$$\overline{H} = \{(x, z) \in H \times \mathbb{C}^{\times} \colon z^2 = \det_{\ell} \det \operatorname{Ad} x\}.$$

On voit donc que l'application $x \mapsto (p(x), \zeta_{\Delta^+}(x))$ est un isomorphisme de $\widetilde{H}$ sur $\overline{H}$. D'où le résultat. $\square$

Désignons par δ^{β} la fonction δ pour $\mathrm{Mp}(V/\ker\beta)$ introduite au numéro 3.2. La démonstration du lemme précédent nous donne alors également le résultat suivant :

Lemme 6. *Soit $H \subset \mathrm{GL}(V)(\beta)$ un tore compact maximal, $\widetilde{H}$ son image inverse dans $\mathrm{ML}(V)$, W l'unique supplémentaire H-invariant de $\ker\beta$ dans V, $\ell \subset W_{\mathbb{C}}$ un lagrangien H-invariant totalement complexe et positif, T un tore compact maximal de $\mathrm{GL}(V)$ contenant H, $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie et Δ^+ un ensemble de poids positifs dans $\Delta_{\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}}}$ tel que*

$$\ell = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+,\ \alpha|_{\mathfrak{h}} \neq 0} V_{\mathbb{C}}^{\alpha}.$$

Alors, pour tout $x \in \widetilde{H}$, on a

$$\zeta_{\Delta^+}(x) = \delta^{\beta} \circ \phi_{\beta}(x).$$

4.4. On suppose que l'espace vectoriel V est de dimension paire. On note $\mathscr{A}(V)$ ou, lorsque aucune confusion n'est possible, $\mathscr{A}$, l'espace des formes bilinéaires alternées sur V et on désigne par $\mathscr{A}'(V)$ ou $\mathscr{A}'$ l'ouvert de Zariski de $\mathscr{A}$ constitué des formes symplectiques. Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$ agit de manière naturelle dans $\mathscr{A}$, et $\mathscr{A}'$ est l'unique orbite ouverte pour cette action.

D'après ce qui précède, si $\beta \in \mathscr{A}'$ le groupe $\mathrm{ML}(V)(\beta)$ est canoniquement isomorphe, via ϕ_{β}, au groupe métaplectique $\mathrm{Mp}(V, \beta)$: dans ce qui suit, nous identifierons ces deux groupes au moyen de cet isomorphisme.

Soit $s \in \mathrm{ML}(V)$, un élément elliptique. On note $\mathscr{A}(V)(s)$ ou $\mathscr{A}(s)$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}$ constitué des formes qui sont invariantes par s et on considère l'ouvert de Zariski $\mathscr{A}'(s) =$

$\mathscr{A}' \cap \mathscr{A}(s)$ de $\mathscr{A}(s)$: il se peut qu'il soit vide. Quoiqu'il en soit, si $\beta \in \mathscr{A}'(s)$, s est un élément du groupe $\mathrm{Mp}(V, \beta)$ et le nombre $\delta^{\beta}(s)$ est bien défini.

Lemme 7. *Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie paire et s un élément elliptique de* $\mathrm{ML}(V)$. *Alors, l'application définie sur $\mathscr{A}'(s)$ par $\beta \mapsto \delta^{\beta}(s)$ est localement constante.*

Démonstration. Désignons par s_V l'image de s dans $\mathrm{GL}(V)$. On considère l'action naturelle de $\mathrm{GL}(V)$ dans $\mathrm{ML}(V)$ par automorphismes intérieurs (voir le numéro 2.16). Alors, il est clair que les groupes $\mathrm{GL}(V)(s)$ et $\mathrm{GL}(V)(s_V)$ ont même composante neutre. Comme $\mathscr{A}'$ est une $\mathrm{GL}(V)$-orbite et comme s_V est semi-simple, il suit d'un résultat de Richardson, que les $\mathrm{GL}(V)(s_V)$-orbites, et donc les $\mathrm{GL}(V)(s)$-orbites, dans $\mathscr{A}'(s)$ sont en nombre fini et ouvertes. Cependant, il est évident par transport de structure que la fonction $\beta \mapsto \delta^{\beta}(s)$ est constante sur chaque $\mathrm{GL}(V)(s)$-orbite dans $\mathscr{A}'(s)$. $\square$

4.5. On garde les notations du numéro précédent et on pose $\dim V = 2n$. On se donne une forme volume η sur V. Si $\beta \in \mathscr{A}'$, on désigne par $\epsilon_{\eta}(\beta)$ le signe du pfaffien de β relativement à η : $\epsilon_{\eta}(\beta) \in \{\pm 1\}$ et on a $\epsilon_{\eta}(\beta) = 1$ si et seulement si $\wedge^{n}\beta$ et $(-1)^{(n(n-1))/2}\eta$ définissent la même orientation sur V.

On se donne un élément elliptique $s \in \mathrm{ML}(V)$ tel que $\det(1 - s_V) \neq 0$. On définit alors une fonction $\sigma_{\eta,s}$ sur $\mathscr{A}'(s)$ en posant :

$$\sigma_{\eta,s}(\beta) = \det{}_{\ell}(1 - s)^{-1}\delta^{\beta}(s)\epsilon_{\eta}(\beta), \tag{4.3}$$

où $\ell \subset V_{\mathbb{C}}$ est un lagrangien pour β, s-invariant et positif. Comme le suggère la notation, ce nombre est indépendant du choix du lagrangien ℓ comme indiqué (voir [15, II.2, Lemme 19]).

Lemme 8. *Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie paire et s un élément elliptique de* $\mathrm{ML}(V)$ *tel que* $\det(1 - s_V) \neq 0$. *Alors la fonction $\sigma_{\eta,s}$ est constante sur $\mathscr{A}'(s)$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la Proposition 38 de [39] et de la formule donnant le caractère de la représentation métaplectique dans [15, II.2, formules (27) et (28)] (voir aussi [22, Théorème 4.2.1]). Il convient néanmoins de noter que, du fait des conventions faites, la représentation métaplectique considérée dans [39, Proposition 38] est la conjuguée de celle considérée dans les deux autres références : pour avoir une formule exacte, il est donc nécessaire de changer i en −i dans la formule y apparaîssant. La comparaison des deux formules résulte également de [7, Proposition 4.3].

Néanmoins, pour la commodité du lecteur, nous donnons une démonstration directe de ce résultat. Désignons par $\mathrm{spec}_{+}(s)$ l'ensemble des valeurs propres de s_V dont la partie imaginaire est strictement positive. Si λ est un nombre complexe, on pose $V^{\lambda} = \ker(s_V - \lambda) \subset V_{\mathbb{C}}$ et $V_{\lambda} = (V^{\lambda} + V^{\bar{\lambda}}) \cap V$.

Alors, on a

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \{-1\} \cup \mathrm{spec}_{+}(s)} V_{\lambda} \tag{4.4}$$

et, cette décomposition en somme directe est orthogonale pour tout $\beta \in \mathscr{A}'(s)$.

Pour tout $\lambda \in \{-1\} \cup \mathrm{spec}_+(s)$, on identifie $\mathrm{ML}(V_\lambda)$ avec le sous-groupe de $\mathrm{ML}(V)$ constitué des éléments agissant trivialement sur

$$\bigoplus_{\lambda' \in \{-1\} \cup \mathrm{spec}_+(s), \lambda' \neq \lambda} V_{\lambda'}.$$

Il est clair que s_V s'écrit comme un produit $s_V = \prod_{\lambda \in \{-1\} \cup \mathrm{spec}_+(s)} s_{V_\lambda}$, avec $s_{V_\lambda} \in \mathrm{GL}^+(V_\lambda)$. Par ailleurs, les sous-groupes $\mathrm{ML}^+(V_\lambda)$, $\lambda \in \{-1\} \cup \mathrm{spec}_+(s)$, commutent deux à deux. On peut donc choisir des éléments $s_\lambda \in \mathrm{ML}^+(V_\lambda)$ et des formes volumes η_λ sur V_λ, $\lambda \in \{-1\} \cup \mathrm{spec}_+(s)$, tels que $s = \prod_{\lambda \in \{-1\} \cup \mathrm{spec}_+(s)} s_\lambda$ et $\eta = \bigwedge_{\lambda \in \{-1\} \cup \mathrm{spec}_+(s)} \eta_\lambda$.

Maintenant, soit $\beta \in \mathscr{A}'(s)$ et, pour $\lambda \in \{-1\} \cup \mathrm{spec}_+(s)$, posons $\beta_\lambda = \beta|_{V_\lambda}$. Alors, β_λ est un élément de $\mathscr{A}'(V_\lambda)(s_\lambda)$, et on voit, grâce à la décomposition (4.4), que l'on a

$$\sigma_{\eta,s}(\beta) = \pm \prod_{\lambda \in \{-1\} \cup \mathrm{spec}_+(s)} \sigma_{\eta_\lambda, s_\lambda}(\beta_\lambda),$$

le signe $\pm$ ne dépendant que de la dimension des V_λ. Il suffit donc de montrer le théorème lorsque, soit $s_V = -1$, soit s_V possède deux valeurs propres distinctes.

Supposons d'abord que $s_V = -1$. Dans ce cas, on a $\mathscr{A}'(s) = \mathscr{A}'$ et aussi $\sigma_{\eta,s}(\beta) = 2^{-n} \delta^\beta(s) \epsilon_\eta(\beta)$, $\beta \in \mathscr{A}'$. Fixons $\beta_0 \in \mathscr{A}'$. On déduit du Corollaire 4.2.1 que

$$\delta^{x.\beta_0}(s) = \mathrm{sign}(\det x) \delta^{\beta_0}(s), \quad x \in \mathrm{GL}(V). \tag{4.5}$$

Dans le même temps, on a

$$\epsilon_\eta(x.\beta_0) = \mathrm{sign}(\det x) \epsilon_\eta(\beta_0), \quad x \in \mathrm{GL}(V). \tag{4.6}$$

Notre assertion, résulte alors des égalités (4.6), (4.5) et du fait que $\mathscr{A}'$ est une $\mathrm{GL}(V)$-orbite.

Supposons maintenant que s_V possède deux valeurs propres distinctes. Alors, on a $V = V_\lambda$ avec $\mathrm{spec}_+(s_V) = \{\lambda\}$ et on peut supposer que, pour toute base $e_1, \ldots, e_n$ de V^λ,

$$\mathrm{i}^n \eta(e_1, \ldots, e_n, \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n) = 1. \tag{4.7}$$

Remarquons que l'application $x \mapsto x|_{V^\lambda}$ induit un isomorphisme de $\mathrm{GL}(V)(s_V)$ sur le groupe linéaire complexe $\mathrm{GL}(V^\lambda)$ de V^λ, de sorte que $\mathrm{GL}(V)(s_V)$ est un groupe connexe. Les groupes $\mathrm{GL}(V)(s)$ et $\mathrm{GL}(V)(s_V)$, ayant même algèbre de Lie, sont donc égaux. D'autre part, si $x \in \mathrm{GL}(s_V)$, on a $\det x = |\det_{V^\lambda} x|^2 > 0$. On voit donc que la fonction $\sigma_{\eta,s}$ est $\mathrm{GL}(V)(s)$-invariante. Il suffit donc de montrer qu'elle prend la même valeur sur un système de représentants des $\mathrm{GL}(V)(s)$-orbites dans $\mathscr{A}'(s)$.

Pour décrire un tel système de représentants, on remarque que $\mathscr{A}'(s)$ est exactement l'ensemble des formes symplectiques sur V pour lesquelles V^λ est un lagrangien complexe. Si $\beta \in \mathscr{A}'(s)$, on désigne par h_β la forme hermitienne non dégénérée sur V^λ définie par $h_\beta(v, w) = \mathrm{i}\beta(v, \bar{w})$. Alors, l'application $\beta \mapsto h_\beta$ est une bijection $\mathrm{GL}(V)(s)$-équivariante de $\mathscr{A}'(s)$ sur l'ensemble des formes hermitiennes non dégénérées sur V^λ. Fixons une base $e_1, \ldots, e_n$ de V^λ.

Pour $0 \leqslant q \leqslant n$, soit h_q la forme hermitienne sur V^λ telle que la base $e_1, \dots, e_n$ soit orthogonale avec

$$h_q(e_j, e_j) = \begin{cases} -1, & 1 \leqslant j \leqslant q, \\ 1, & q+1 \leqslant j \leqslant n, \end{cases}$$

et soit $\beta_q \in \mathscr{A}'(s)$ tel que $h_q = h_{\beta_q}$. Alors, $\{\beta_q, 0 \leqslant q \leqslant n\}$ est un ensemble de représentants de $\mathrm{GL}(s) \setminus \mathscr{A}'(s)$ et il suffit de montrer que $\sigma_{\eta,s}(\beta_q)$ est indépendant de $0 \leqslant q \leqslant n$.

Soit $T \subset \mathrm{GL}(V)$ un tore compact maximal contenant s_V et $\mathfrak{t} \subset \mathrm{gl}(V)$ son algèbre de Lie. L'image inverse de T dans $\mathrm{ML}(V)$ est un tore compact maximal contenant s. Par suite, T est contenu dans $\mathrm{GL}(V)(s)$ et on peut supposer, quitte à conjuguer par un élément de ce dernier groupe, que $e_1, \dots, e_n$ est une base de vecteurs poids pour l'action de $\mathfrak{t}$ dans V^λ. Soit alors $X \in \mathfrak{t}$ tel que $\exp X = s$ et $\theta_j \in \mathbb{R}$ tels que $X.e_j = \mathrm{i}\theta_j e_j$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j} = \lambda$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Soit $0 \leqslant q \leqslant n$. Alors $\ell = \mathbb{C}\bar{e}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\bar{e}_q \oplus \mathbb{C}e_{q+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n$ est un lagrangien pour β_q, positif, T-invariant, T est contenu dans $\mathrm{Sp}(\beta_q)$ et $\delta^{\beta_q}(s) = \mathrm{e}^{1/2 \operatorname{Tr}_\ell X}$, si bien qu'un calcul facile montre que

$$\delta^{\beta_q}(s) \det{}_\ell(1-s)^{-1} = (-1)^q \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\operatorname{Tr}_{V^\lambda} X}(1-\lambda)^{-n}. \tag{4.8}$$

Maintenant, on a

$$\beta_q = \mathrm{i}\left(\sum_{j=1}^{q} e_j^* \wedge \bar{e}_j^* - \sum_{j=q+1}^{n} e_j^* \wedge \bar{e}_j^*\right),$$

$e_1^*, \dots, e_n^*, \bar{e}_1^*, \dots, \bar{e}_n^*$ étant la base duale de la base $e_1, \dots, e_n, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ de $V_{\mathbb{C}}$, et donc

$$\frac{1}{n!} \wedge^n \beta_q = (-1)^q (-\mathrm{i})^n \bigwedge_{j=1}^{n} \left(e_j^* \wedge \bar{e}_j^*\right).$$

On déduit de cette dernière relation et de (4.7) que $\epsilon_\eta(\beta_q) = (-1)^q$. Finalement, grâce à la formule (4.8), on voit que

$$\sigma_{\eta,s}(\beta_q) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\operatorname{Tr}_{V^\lambda} X}(1-\lambda)^{-n}$$

est indépendant de q, comme voulu. □

4.6. Soit $(G, j, \boldsymbol{G})$ un groupe presque algébrique réel dont on note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie.

Considérons le revêtement métalinéaire $p_G : \widetilde{G}_{\mathrm{Ad}} \to G$ de G associé à la représentation adjointe et que nous désignerons plus simplement par $\widetilde{G}$ lorsque aucune confusion n'est possible (voir [14, numéro 5.3]) :

$$\widetilde{G} = \left\{(g, h) \in G \times \mathrm{ML}(\mathfrak{g}) \colon \ \mathrm{Ad}\, g = p(h)\right\},$$

le morphisme de revêtement étant donné par la première projection. On considère aussi le morphisme $\tilde{j} = j \circ p_G$ de $\widetilde{G}$ dans $\boldsymbol{G}_{\mathbb{R}}$. Il est immédiat que $\ker \tilde{j}$ est un sous-groupe central de $\widetilde{G}$ et donc que $(\widetilde{G}, \tilde{j}, \boldsymbol{G})$ est un groupe presque algébrique. D'autre part le morphisme $\widetilde{\mathrm{Ad}}_G$ de $\widetilde{G}$ dans $\mathrm{ML}(\mathfrak{g})$ défini par $\widetilde{\mathrm{Ad}}_G(g,h) = h$ relève les morphismes Ad de G et de $\widetilde{G}$ dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$.

Soit $(G', j', \boldsymbol{G}')$ un autre groupe presque algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ et $a:(G, j, \boldsymbol{G}) \to (G', j', \boldsymbol{G}')$ un isomorphisme de groupes presque algébriques, dont on note encore $a:\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ la différentielle qui est un isomorphisme d'algèbres de Lie. Comme nous l'avons vu à la fin du numéro 4.1, a induit un isomorphisme de groupes de Lie $h \mapsto aha^{-1}$ de $\mathrm{ML}(\mathfrak{g})$ sur $\mathrm{ML}(\mathfrak{g}')$. Compte tenu de la relation (4.1), on voit que l'application $(g,h) \mapsto (a(g), aha^{-1})$ relève canoniquement a en un isomorphisme de groupes presque algébriques $a:\widetilde{G} \to \widetilde{G}'$ tel que $p \circ a = a \circ p$.

4.7. Nous supposons jusqu'à la fin de ce numéro que le groupe presque algébrique $(G, j, \boldsymbol{G})$ est tel qu'il existe un morphisme $\widetilde{\mathrm{Ad}}:G \to \mathrm{ML}(\mathfrak{g})$ qui relève le morphisme $\mathrm{Ad}:G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, i.e. qui vérifie $\mathrm{Ad} = p \circ \widetilde{\mathrm{Ad}}$. Comme on vient de le voir, c'est le cas du revêtement métalinéaire $\widetilde{G}$ de G, le relèvement $\widetilde{\mathrm{Ad}}_G$ étant alors canonique.

On a donc $\widetilde{\mathrm{Ad}}(\ker j) \subset \{1, \epsilon\}$. On définit alors un caractère ζ_G de $\ker j$, noté plus simplement ζ s'il n'y a pas ambiguïté, en décidant que, pour tout $\gamma \in \ker j$,

$$\zeta(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{si } \widetilde{\mathrm{Ad}}(\gamma) = 1, \\ -1, & \text{si } \widetilde{\mathrm{Ad}}(\gamma) = \epsilon. \end{cases}$$

Maintenant, soit $\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{G}$ un tore défini sur $\mathbb{R}$ et anisotrope. Soit $T = j^{-1}(\boldsymbol{T}_{\mathbb{R}})$, qui est un sous-groupe fermé de G dont l'algèbre de Lie est notée $\mathfrak{t}$. On désigne par $\mathscr{L}(\mathfrak{t})$ l'ensemble des sous-espaces ℓ de $[\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}]$ qui sont $\mathfrak{t}$-invariants et tels que $[\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}] = \ell \oplus \bar{\ell}$. Si $\ell \subset [\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}]$ est un sous-espace $\mathfrak{t}$-invariant, on a

$$\ell = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}} \ell^{\alpha},$$

où $\ell^{\alpha} = \ell \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$, $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$. Dans ces conditions ℓ est un élément de $\mathscr{L}(\mathfrak{t})$ si et seulement si pour tout $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$, on a $\dim \ell^{\alpha} + \dim \ell^{-\alpha} = \dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$.

Étant donné $\ell \in \mathscr{L}(\mathfrak{t})$, on définit la forme linéaire ρ_{ℓ} sur $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ en posant

$$\rho_{\ell}(X) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}_{\ell} \operatorname{ad} X, \quad X \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}.$$

On a alors le résultat :

Lemme 9. *Il existe un unique caractère ζ_{ℓ} de T dont ρ_{ℓ} soit la différentielle et tel que $\zeta_{\ell | \ker j} = \zeta$.*

Démonstration. L'unicité de ζ_{ℓ} est claire. Maintenant, si ℓ et ℓ' sont deux éléments de $\mathscr{L}(\mathfrak{t})$, $\rho_{\ell} - \rho_{\ell'}$ est la différentielle d'un caractère de $\boldsymbol{T}$. On voit donc que pour montrer l'existence de ζ_{ℓ}, on peut supposer que ℓ est somme de certains des $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$, $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$. Considérons alors $\widetilde{T} \subset \mathrm{ML}(\mathfrak{g})$ un tore compact maximal contenant $\widetilde{\mathrm{Ad}}(T)$ dont on note $\tilde{\mathfrak{t}}$ l'algèbre de Lie. Il existe un ensemble de poids positifs $\Delta^{+} \subset \Delta_{\tilde{\mathfrak{t}}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ tel que

$$\ell = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^{+},\, \alpha \circ \operatorname{ad}|_{\mathfrak{t}} \neq 0} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}.$$

Il suffit alors de poser, avec les notations du Lemme 4, $\zeta_{\ell} = \zeta_{\Delta^{+}} \circ \widetilde{\mathrm{Ad}}|_{T}$. $\square$

5. Sous-algèbres coisotropes et sous-groupes induisants associés

5.1. On se donne désormais un groupe presque algébrique réel $G = (G, j, \boldsymbol{G})$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $g \in \mathfrak{g}^*$.

Définition 5.1.1. Une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ sera dite coisotrope relativement à g si l'orthogonal $\mathfrak{b}^g$ de $\mathfrak{b}$ par rapport à β_g est contenu dans $\mathfrak{b}$.

Soit $g \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. On pose $b = g|_{\mathfrak{b}}$ et on désigne par $\mathfrak{b}^{\perp}$ l'orthogonal de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}^*$. D'après [9, Chapitre I, numéro 4], on a alors le lemme :

Lemme 10. *Le sous-espace $\mathfrak{b}(b).g$ de $\mathfrak{g}^*$ est contenu dans $\mathfrak{b}^{\perp}$. De plus $\mathfrak{b}$ est coisotrope relativement à g si et seulement si ces deux sous-espaces sont égaux.*

5.2. Soit $g \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre coisotrope relativement à g et $b = g|_{\mathfrak{b}}$. Alors la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{b}(b)$ est algébrique. D'autre part, soit $\boldsymbol{B}(b)$ le sous-groupe algébrique connexe de $\boldsymbol{G}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}(b)_{\mathbb{C}}$. Enfin soit ω l'ensemble des $g' \in g + \mathfrak{b}^{\perp}$ tels que $\dim \mathfrak{g}(g')$ soit minimum. Alors ω est égal à l'ensemble des points réels de l'orbite $\boldsymbol{B}(b).g$, lequel est un ouvert de Zariski contenant g du sous-espace affine $g + \mathfrak{b}^{\perp}$.

Définition 5.2.1. On dit que la sous-algèbre $\mathfrak{b}$, coisotrope relativement à g, vérifie la condition de Pukanszky si l'on a $\omega = g + \mathfrak{b}^{\perp}$. On note $Cos(g)$ l'ensemble des sous-algèbres algébriques coisotropes relativement à g, vérifiant la condition de Pukanszky.

Un élément $\mathfrak{b}$ de $Cos(g)$ sera dit de type unipotent s'il possède un facteur réductif stabilisant la restriction de g à ${}^u\mathfrak{b}$. On note $Cosu(g)$ le sous-ensemble de $Cos(g)$ constitué des éléments de type unipotent.

On dit que la sous-algèbre $\mathfrak{b}$, coisotrope relativement à g, est de type fortement unipotent si elle est algébrique et si elle vérifie $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}(g) + {}^u\mathfrak{b}$.

Le résultat suivant nous sera utile (voir la remarque dans [9, Chapitre I, numéro 5]) :

Lemme 11. *Soit $g \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre coisotrope relativement à g vérifiant la condition de Pukanszky. Alors, on a ${}^u(\boldsymbol{B}(b))_{\mathbb{R}}.g = g + \mathfrak{b}^{\perp}$.*

D'après [9, Chapitre I, numéro 9], toute sous-algèbre coisotrope de type fortement unipotent est de type unipotent.

5.3. Nous rappelons dans ce numéro la notion de sous-algèbre induisante canonique $\mathfrak{b}_g$ (introduite, sous le vocable de sous-algèbre acceptable canonique, par Duflo dans [9]) associée à la forme linéaire g.

On définit $\mathfrak{b}_g$ par récurrence sur la dimension de l'algèbre de Lie algébrique $\mathfrak{g}$ de la manière suivante. Soit $u = g|_{{}^u\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{h}$ le stabilisateur de u dans $\mathfrak{g}$ et $h = g|_{\mathfrak{h}}$. Alors, on a

(i) $\mathfrak{b}_g = \mathfrak{b}_h + {}^u\mathfrak{g}$, si $\dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$,
(ii) $\mathfrak{b}_g = \mathfrak{g}$, sinon.

Par exemple, on a $\mathfrak{b}_g = \mathfrak{g}$ dès que $\mathfrak{g}$ est réductive ou nilpotente. Remarquons d'autre part que, $\mathfrak{b}_g$ étant canonique, elle est invariante par les automorphismes de $\mathfrak{g}$ fixant g.

5.4. Nous aurons besoin de la notion de forme de type unipotent.

Définition 5.4.1. Une forme linéaire g sur $\mathfrak{g}$ est dite de type unipotent si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(i) il existe un facteur réductif de $\mathfrak{g}(g)$ contenu dans $\ker g$,
(ii) il existe une sous-algèbre coisotrope de type fortement unipotent relativement à g.

Il est clair que la condition (i) entraîne que g s'annule sur tout facteur réductif de $\mathfrak{g}$.

Si G est réductif, 0 est l'unique forme de type unipotent sur $\mathfrak{g}$.

Si g est une forme de type unipotent, tout élément de $Cosu(g)$ est de type fortement unipotent (voir [9, Chapitre I, numéro 22]).

Nous désignerons par $\mathfrak{g}_u^*$ le sous-ensemble de $\mathfrak{g}^*$ constitué des formes de type unipotent. C'est une partie G-invariante de $\mathfrak{g}^*$.

5.5. Soit g un élément de $\mathfrak{g}_u^*$. On note $L(g)$ l'ensemble des formes linéaires $\lambda \in \mathfrak{g}(g)^*$ telles que λ et g aient même restriction à ${}^u(\mathfrak{g}(g))$ et on désigne par $\mathcal{L}$ l'ensemble des couples (g, λ) tels que $g \in \mathfrak{g}_u^*$ et $\lambda \in L(g)$. Le groupe G opère naturellement dans $\mathcal{L}$.

Soit $(g, \lambda) \in \mathcal{L}$, $\mathfrak{b} \in Cosu(g)$ et $f \in \mathfrak{g}^*$ une forme linéaire ayant même restriction que g à ${}^u\mathfrak{b}$ et dont la restriction à $\mathfrak{g}(g)$ est λ. D'après [9, Chapitre I, Proposition 26], on a :

Proposition 5.5.1.

(i) *L'orbite $G.f$ de f dans $\mathfrak{g}^*$ ne dépend pas des choix de $\mathfrak{b}$ et de f. On la note $\Omega_{g,\lambda}$.*
(ii) *L'application $(g, \lambda) \mapsto \Omega_{g,\lambda}$ induit une bijection de $G \setminus \mathcal{L}$ sur $G \setminus \mathfrak{g}^*$.*

Définition 5.5.1. On dit que deux formes linéaires f et f' sur $\mathfrak{g}$ sont u-équivalentes s'il existe (g, λ) et (g, λ') dans $\mathcal{L}$ tels que $f \in \Omega_{g,\lambda}$ et $f' \in \Omega_{g,\lambda'}$.

On voit que si $f \in \mathfrak{g}^*$, l'ensemble des formes de type unipotent qui sont u-équivalentes à f est une G-orbite.

5.6. Soit $g \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{b}$ un élément de $Cos(g)$ qui soit $G(g)$-invariant : il en existe toujours, y compris dans $Cosu(g)$, par exemple, l'élément canonique de $Cosu(g)$ dont il est question au numéro 5.3 (voir [9, Chapitre I, numéro 20]). On note B_0 le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$. Alors $B = G(g)B_0$ est un sous-groupe presque algébrique de G, que l'on appelle le sous-groupe induisant associé à $\mathfrak{b}$. Comme $\mathfrak{b}$ possède des facteurs réductifs stabilisant la restriction u de g à ${}^u\mathfrak{b}$, il en est de même de B.

Lorsque $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_g$, on appelle B le sous-groupe induisant canonique relativement ou associé à g et on le note B_g.

6. Formes linéaires fortement régulières et admissibles. Mesures canoniques

6.1. Rappelons qu'une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ est dite fortement régulière si elle est régulière, auquel cas $\mathfrak{g}(g)$ est une algèbre de Lie algébrique commutative, et si de plus le tore $\mathfrak{j}_g$, unique facteur réductif de $\mathfrak{g}(g)$, est de dimension maximale lorsque g parcourt l'ensemble des formes régulières. Il est bien connu que l'ensemble $\mathfrak{g}_r^*$ des formes fortement régulières est un ouvert de Zariski G-invariant non vide de $\mathfrak{g}^*$.

Les tores $\mathfrak{j}_g$, $g \in \mathfrak{g}_r^*$ sont appelés les sous-algèbres de Cartan–Duflo de $\mathfrak{g}$. On désigne par $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$ leur ensemble. Par ailleurs, l'ensemble $\mathrm{Car}_G(\mathfrak{g})$ de leurs classes de G-conjugaison est fini et même réduit à un élément si l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est complexe.

Si $\mathfrak{j} \in \mathrm{car}(\mathfrak{g})$, on désigne par $Z_G(\mathfrak{j})$ et $N_G(\mathfrak{j})$ son centralisateur et son normalisateur dans G. Ce sont deux sous-groupes presque algébriques de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$. Par suite le groupe quotient $W(G,\mathfrak{j}) = N_G(\mathfrak{j})/Z_G(\mathfrak{j})$ est un groupe fini. Pour ce qui précède, voir [1, numéro 11].

6.2. Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $\ker j$ et χ un caractère unitaire de Γ. On reprend les notations des numéros 4.6 et 4.7. Alors, on note $\breve{\chi}$ le caractère de $p_G^{-1}(\Gamma)$ défini par

$$\breve{\chi}(\gamma) = \chi \circ p_G(\gamma)\zeta_{\widetilde{G}}(\gamma), \quad \gamma \in p_G^{-1}(\Gamma), \tag{6.1}$$

et on pose

$$E_{G,\Gamma} = \{X \in \mathfrak{g}\colon \exp X \in \Gamma\} = \{X \in \mathfrak{g}\colon \exp_{\widetilde{G}} X \in p_G^{-1}(\Gamma)\} = E_{\widetilde{G}, p_G^{-1}(\Gamma)}.$$

On note $\mathfrak{g}_{G,\chi}^*$ le sous-ensemble de $\mathfrak{g}_r^*$ constitué des formes g qui vérifient

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle g,T\rangle} = \breve{\chi}(\exp_{\widetilde{G}} T), T \in \mathfrak{j}_g \cap E_{G,\Gamma}. \tag{6.2}$$

Alors, $\mathfrak{g}_{G,\chi}^*$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}_r^*$, G-χ-admissibles, au sens du numéro 8.1.

Comme pour tout $g \in \mathfrak{g}_{G,\chi}^*$ on a $g \in \mathfrak{g}_{G,\chi}^{*\mathfrak{j}_g}$, $\mathfrak{g}_{G,\chi}^*$ est réunion des G-orbites des éléments des $\mathfrak{g}_{G,\chi}^{*\mathfrak{j}}$, $\mathfrak{j} \in \mathrm{Car}_G(\mathfrak{g})$. Soit donc $\mathfrak{j}$ un élément de $\mathrm{car}(\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{t}$ sa partie anisotrope ou elliptique. On pose $\mathfrak{t}_\Gamma = \mathfrak{t} \cap E_{G,\Gamma}$. C'est un réseau de $\mathfrak{t}$. Désignons par $\mathfrak{t}_{\Gamma,\chi}^*$ le translaté du réseau dual constitué des formes linéaires μ sur $\mathfrak{t}$ qui vérifient

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(T)} = \breve{\chi}(\exp_{\widetilde{G}} T), \quad T \in \mathfrak{t}_\Gamma.$$

Alors, on a

$$\mathfrak{g}_{G,\chi}^{*\mathfrak{j}} = \{g \in \mathfrak{g}_r^{*\mathfrak{j}}\colon g|_{\mathfrak{t}} \in \mathfrak{t}_{\Gamma,\chi}^*\}.$$

6.3. On reprend les notations du numéro précédent. Supposons que le groupe G satisfasse les hypothèses du numéro 4.7. Il s'identifie alors à un sous-groupe de $\widetilde{G}$ au moyen du morphisme $x \mapsto (x, \widetilde{\mathrm{Ad}}\, x)$ de sorte que l'on peut voir $\breve{\chi}$, ou plutôt sa restriction, comme un caractère de Γ. Dans ces conditions, on a

$$\breve{\chi}(\gamma) = \chi(\gamma)\zeta_G(\gamma), \quad \gamma \in \Gamma. \tag{6.3}$$

Si le caractère $\breve{\chi}$ de Γ peut dépendre du choix du relèvement $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ de Ad, sa restriction à $\Gamma \cap G_0$ n'en dépend pas.

On voit donc que dans ce cas, pour $\mathfrak{j} \in \mathrm{car}\,\mathfrak{g}$, on a

$$\mathfrak{t}_{\Gamma,\chi}^* = \{\mu \in \mathfrak{t}^*\colon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu(T)} = \breve{\chi}(\exp T),\ T \in \mathfrak{t}_\Gamma\}.$$

On déduit de cette remarque, que dans le cas général, on a

$$\mathfrak{g}^*_{G,\chi} = \mathfrak{g}^*_{\widetilde{G},\chi\circ p_G}.$$

6.4. Soit $s \in G$ semi-simple. Comme on a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(s) \oplus (\operatorname{Ad} s - 1)\mathfrak{g}$, on voit que $\mathfrak{g}(s)^*$ s'identifie de manière naturelle au sous-espace des éléments de $\mathfrak{g}^*$ fixés par s, $(\operatorname{Ad}^* s - 1)\mathfrak{g}^*$ à l'orthogonal de $\mathfrak{g}(s)$ et que l'on a la décomposition $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}(s)^* \oplus (\operatorname{Ad}^* s - 1)\mathfrak{g}^*$. On pose alors $\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr}} = \mathfrak{g}(s)^* \cap \mathfrak{g}^*_r$.

Fixons η_s une forme volume sur $(\operatorname{Ad} s - 1)\mathfrak{g}$. On définit alors le polynôme $\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}$ sur $\mathfrak{g}(s)^*$ en décidant que, pour tout $g \in \mathfrak{g}(s)^*$, $\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(g)$ est le pfaffien relativement à η_s de la forme bilinéaire alternée restriction de β_g à $(\operatorname{Ad} s - 1)\mathfrak{g}$. Le polynôme $\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}$ est semi-invariant sous l'action de $G(s)$. Plus précisément, il vérifie :

$$\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(y.g) = \left(\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(s)} \operatorname{Ad} y\right)^{-1} \pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(g), \quad g \in \mathfrak{g}(s)^*,\ y \in G(s). \tag{6.4}$$

Si $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}\mathfrak{g}$, on note $\boldsymbol{J}$ le tore de $\boldsymbol{G}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ et J l'image inverse de $\boldsymbol{J}$ par j. On dit que J est le sous-groupe de Cartan–Duflo de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{j}$. Il est alors clair que $p_G^{-1}(J)$ est le sous-groupe de Cartan–Duflo de $\widetilde{G}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{j}$.

Définition 6.4.1. Soit s un élément semi-simple. On dit que s est en bonne position s'il existe $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}\mathfrak{g}$ tel que s soit un élément du sous-groupe de Cartan–Duflo d'algèbre de Lie $\mathfrak{j}$. On désigne par G_{bp} l'ensemble des éléments semi-simples en bonne position de G et par $G_{\mathrm{ell,bp}}$ l'ensemble de ces éléments qui sont elliptiques.

Si le groupe G est réductif et connexe, tout élément semi-simple de G est en bonne position.

Soit $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g})$, $T \in \mathfrak{j}$ tel que $e^{\alpha(T)} \neq 1$ pour tout poids non nul α de $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ et $s = \exp T$. Alors $s \in G_{\mathrm{bp}}$ et on a $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}} = \mathfrak{g}(s)$, de sorte que l'on peut définir le polynôme $\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{j}}$ (modulo le choix d'une forme volume $\eta_{\mathfrak{g},\mathfrak{j}}$ sur $[\mathfrak{j},\mathfrak{g}]$).

Lemme 12. *Soit $s \in G_{\mathrm{bp}}$. Alors les sous-algèbres de Cartan–Duflo de $\mathfrak{g}(s)$ sont les sous-algèbres de Cartan–Duflo $\mathfrak{j}$ de $\mathfrak{g}$ qui sont telles que s soit contenu dans le sous-groupe de Cartan–Duflo d'algèbre de Lie $\mathfrak{j}$ et, pour une telle sous-algèbre de Cartan–Duflo, on a $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}} \subset \mathfrak{g}(s)$ et aussi $(\operatorname{Ad} s - 1)\mathfrak{g} \subset [\mathfrak{j},\mathfrak{g}]$.*

De plus, $\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}$ est un polynôme non nul et une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}(s)^*$ est fortement régulière pour $\mathfrak{g}$, i.e. est dans $\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr}}$, si et seulement si d'une part elle l'est pour $\mathfrak{g}(s)$, i.e. elle est dans $\mathfrak{g}(s)^*_r$, et d'autre part $\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(g) \neq 0$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}\mathfrak{g}$ telle que $s \in J$. Il est clair que $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}} \subset \mathfrak{g}(s)$, $(\operatorname{Ad} s - 1)\mathfrak{g} \subset [\mathfrak{j},\mathfrak{g}]$ et $\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}} \subset \mathfrak{g}(s)^*$. Soit ψ l'application de $G \times \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}_r$ dans $\mathfrak{g}^*_r$ définie par $\psi(x,g) = x.g$ et soit ψ_s sa restriction à $G(s) \times \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}_r$ qui est à valeurs dans $\mathfrak{g}(s)^*$. Désignons par p aussi bien la projection sur $\mathfrak{g}(s)$ parallèlement à $(\operatorname{Ad} s - 1)\mathfrak{g}$ que celle sur $\mathfrak{g}(s)^*$ parallèlement à $(\operatorname{Ad}^* s - 1)\mathfrak{g}^*$. Pour $g \in \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}_r$ considérons la différentielle $\mathrm{d}\psi(1,g)$ (respectivement $\mathrm{d}\psi_s(1,g)$) de ψ (respectivement ψ_s) en $(1,g)$ qui vérifie $\mathrm{d}\psi(1,g).(X,h) = X.g + h$ (respectivement $\mathrm{d}\psi_s(1,g).(X,h) = X.g + h$), $X \in \mathfrak{g}$

(respectivement $X \in \mathfrak{g}(s)$), $h \in \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$. Il est alors immédiat que l'on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}} & \xrightarrow{\mathrm{d}\psi(1,g)} & \mathfrak{g}^* \\ {\scriptstyle p\times \mathrm{Id}}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle p} \\ \mathfrak{g}(s) \times \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}} & \xrightarrow[\mathrm{d}\psi_s(1,g)]{} & \mathfrak{g}(s)^* \end{array}$$

Comme ψ est une submersion (voir [1, Lemme 42]), il en résulte que ψ_s est également une submersion. Il s'ensuit que $\mathfrak{g}_r^{*\mathfrak{j}} \cap \mathfrak{g}(s)_r^* \neq \emptyset$ et donc que $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g}(s))$. La première assertion du lemme est alors conséquence de ce que, d'après [1, Lemme 43], deux éléments de $\operatorname{car}(\mathfrak{g}(s))$ sont conjugués sous $\boldsymbol{G}(s)$.

Remarquons qu'étant donné $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g}(s))$, on peut choisir les formes volumes $\eta_{\mathfrak{g},\mathfrak{j}}$, $\eta_{\mathfrak{g}(s),\mathfrak{j}}$ et η_s sur respectivement $[\mathfrak{j},\mathfrak{g}]$, $[\mathfrak{j},\mathfrak{g}(s)]$ et $(\operatorname{Ad} s - 1)\mathfrak{g}$ de telle sorte que $\eta_{\mathfrak{g},\mathfrak{j}} = \eta_{\mathfrak{g}(s),\mathfrak{j}} \wedge \eta_s$, si bien que l'on a $\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{j}} = \pi_{\mathfrak{g}(s),\mathfrak{j}}\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}$. La dernière assertion du lemme, est alors conséquence de ce que, si $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g})$, une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$ est fortement régulière relativement à $\mathfrak{g}$, si et seulement si, d'une part, elle est régulière relativement à $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ et, d'autre part, $\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{j}}(g) \neq 0$ (voir [1, Lemme 43]). □

6.5. Désormais, on suppose que $s \in \widetilde{G}_{\mathrm{bp}}$ et on garde les notations du numéro précédent. Si $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g}(s))$, on note $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\mathfrak{j}}$ (respectivement $\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}$) le sous-ensemble de $\mathfrak{g}(s)^*_r$ constitué des formes linéaires qui sont $G(s)$-conjuguées à un élément de $\mathfrak{g}(s)_r^{*\mathfrak{j}}$ (respectivement $\mathfrak{g}_r^{*\mathfrak{j}} = \mathfrak{g}(s)_{\mathrm{tr}}^{*\mathfrak{j}}$). Avec ces notations, on a

$$\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}} \subset \mathfrak{g}(s)^*_{r,\mathfrak{j}},$$
$$\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr}} = \bigsqcup_{\mathfrak{j}\in \operatorname{Car}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s))} \mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}, \qquad \mathfrak{g}(s)^*_r = \bigsqcup_{\mathfrak{j}\in \operatorname{Car}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s))} \mathfrak{g}(s)^*_{r,\mathfrak{j}}.$$

On pose $\mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi} = \mathfrak{g}^*_{G,\chi} \cap \mathfrak{g}(s)^*$ et si $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g}(s))$, $\mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi,\mathfrak{j}} = \mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi} \cap \mathfrak{g}(s)^*_{r,\mathfrak{j}}$.

Maintenant, on désigne par $p_s : G(s)^{\tilde{}s} \to G(s)$ le revêtement métalinéaire construit sur l'action adjointe Ad_s de $G(s)$ dans $\mathfrak{g}_s := (1 - \operatorname{Ad} s)\mathfrak{g}$: $\operatorname{Ad}_s x = \operatorname{Ad} x|_{\mathfrak{g}_s}$, $x \in G(s)$ et $G(s)^{\tilde{}s} = \{(x,m) \in G(s) \times \mathrm{ML}(\mathfrak{g}_s)\colon \operatorname{Ad}_s x = p(m)\}$, p_s étant la première projection. On pose $j_s = j \circ p_s$, $\varGamma_s = p_s^{-1}(\varGamma)$ et on désigne par $\boldsymbol{H}$ l'adhérence de Zariski de $G(s)$ dans $\boldsymbol{G}$. Alors, $(G(s)^{\tilde{}s}, j_s, \boldsymbol{H})$ est un groupe presque algébrique, $\varGamma_s$ est un sous-groupe d'indice fini de $\ker j_s$ et l'action adjointe de $G(s)$ dans $\mathfrak{g}_s$ se relève naturellement en le morphisme $\widetilde{\operatorname{Ad}}_s : G(s)^{\tilde{}s} \to \mathrm{ML}(\mathfrak{g}_s)$ tel que $\widetilde{\operatorname{Ad}}_s(x,m) = m$. On définit alors le caractère ζ_s de $\ker j_s$ en posant

$$\zeta_s(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{si } \widetilde{\operatorname{Ad}}_s(\gamma) = 1, \\ -1, & \text{si } \widetilde{\operatorname{Ad}}_s(\gamma) = \epsilon, \end{cases}$$

et on considère le caractère χ_s de $\varGamma_s$ défini par $\chi_s(\gamma) = \chi \circ p_s(\gamma)\zeta_s(\gamma)$.

Comme on a la décomposition en somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(s) \oplus \mathfrak{g}_s$, les groupes $\mathrm{ML}(\mathfrak{g}(s))$ et $\mathrm{ML}(\mathfrak{g}_s)$ s'identifient à deux sous-groupes de $\mathrm{ML}(\mathfrak{g})$ (voir le numéro 4.1). Alors, le revêtement métalinéaire associé à la représentation adjointe de $G(s)^{\tilde{}s}$ est donné par $(G(s)^{\tilde{}s})^{\tilde{}} =$

$\{(x, m_1, m_2) \in G(s) \times \mathrm{ML}(\mathfrak{g}_s) \times \mathrm{ML}(\mathfrak{g}(s))\colon\ \mathrm{Ad}_s\, x = p(m_1)$ et $\mathrm{Ad}\, x|_{\mathfrak{g}(s)} = p(m_2)\}$ et le morphisme p_s se relève naturellement en le morphisme $\tilde{p}_s : (G(s)^{\tilde{}s})^{\tilde{}} \to \widetilde{G}(s)$ défini par $\tilde{p}_s(x, m_1, m_2) = (x, m_1 m_2)$.

Lemme 13. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\breve{\chi}_s(\gamma) = \breve{\chi} \circ \tilde{p}_s(\gamma), \quad \gamma \in (p_{G(s)^{\tilde{}s}})^{-1}(\Gamma_s) \tag{6.5}$$

et aussi

$$\mathfrak{g}(s)^*_{G(s)^{\tilde{}s}, \chi_s} = \left\{g \in \mathfrak{g}(s)^*_r\colon\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle g, X\rangle} = \breve{\chi}(\exp_{\widetilde{G}} T), T \in \mathfrak{j}_g \cap E_{G,\Gamma}\right\}.$$

Démonstration. Soit $G(s)^{\tilde{}}$ (respectivement $(G(s)^{\tilde{}s})^{\tilde{}}$) le revêtement métalinéaire associé à la représentation adjointe de $G(s)$ (respectivement $G(s)^{\tilde{}s}$) et $q : (G(s)^{\tilde{}s})^{\tilde{}} \to G(s)^{\tilde{}}$ le morphisme défini par $q(x, m_1, m_2) = (x, m_2)$. Alors, on a clairement $\zeta_{(G(s)^{\tilde{}s})^{\tilde{}}}(\gamma) = \zeta_{G(s)^{\tilde{}}} \circ q(\gamma)$, $\gamma \in \ker j_s \circ p_{G(s)^{\tilde{}s}}$ et donc $\breve{\chi}_s(\gamma) = \chi_s \circ p_{G(s)^{\tilde{}s}}(\gamma)\zeta_{G(s)^{\tilde{}}} \circ q(\gamma)$, $\gamma \in (p_{G(s)^{\tilde{}s}})^{-1}(\Gamma_s)$. Cependant, on a $p_s \circ p_{G(s)^{\tilde{}s}} = p_G \circ \tilde{p}_s$ et $\zeta_{\widetilde{G}} \circ \tilde{p}_s(\gamma) = \zeta_s \circ p_{G(s)^{\tilde{}s}}(\gamma)\zeta_{G(s)^{\tilde{}}} \circ q(\gamma)$, $\gamma \in (p_{G(s)^{\tilde{}s}})^{-1}(\Gamma_s)$. Il vient alors, pour $\gamma \in (p_{G(s)^{\tilde{}s}})^{-1}(\Gamma_s)$,

$$\breve{\chi}_s(\gamma) = \chi \circ p_s \circ p_{G(s)^{\tilde{}s}}(\gamma)\zeta_s \circ p_{G(s)^{\tilde{}s}}(\gamma)\zeta_{G(s)^{\tilde{}}} \circ q(\gamma) = \chi \circ p_G \circ \tilde{p}_s(\gamma)\zeta_{\widetilde{G}} \circ \tilde{p}_s(\gamma),$$

ce qui démontre la relation (6.5).

Mais alors, la dernière assertion du lemme est conséquence immédiate du fait que $\mathfrak{g}(s) \cap E_{G,\Gamma} = E_{G(s)^{\tilde{}s}, \Gamma_s}$. $\square$

Pour simplifier, on pose $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi} = \mathfrak{g}(s)^*_{G(s)^{\tilde{}s}, \chi_s}$ et si $\mathfrak{j} \in \mathrm{car}(\mathfrak{g}(s))$, $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi,\mathfrak{j}} = \mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi} \cap \mathfrak{g}(s)^*_{r,\mathfrak{j}}$. On remarquera que, lorsque $\mathrm{Ad}\, s = 1$, $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi} = \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$.

Il résulte de [1, Lemmes 42 et 44] qu'étant donné $\mathfrak{j} \in \mathrm{car}(\mathfrak{g}(s))$, l'application $(x, g) \mapsto x.g$ induit un difféomorphisme de l'ouvert $G(s) \times_{N_{G(s)}(\mathfrak{j})} \mathfrak{g}(s)^{*\mathfrak{j}}_r$ du fibré $G(s) \times_{N_{G(s)}(\mathfrak{j})} \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$ sur l'ouvert $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\mathfrak{j}}$ de $\mathfrak{g}(s)^*$. On en déduit facilement que $\mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi} \subset \mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$ sont des sous-variétés analytiques régulièrement plongées de $\mathfrak{g}(s)^*$. De plus, on a clairement

$$\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi} = \bigsqcup_{\mathfrak{j} \in \mathrm{Car}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s))} \mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi,\mathfrak{j}}, \qquad \mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi} = \bigsqcup_{\mathfrak{j} \in \mathrm{Car}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s))} \mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi,\mathfrak{j}}.$$

6.6. On garde les notations des numéros 6.4 et 6.5. Soit $\mathrm{d}_G x$ une mesure de Haar à gauche sur G, $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}} X$ la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}$ tangente à $\mathrm{d}_G x$ et $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^*} g$ la mesure de Lebesgue duale.

On munit $\mathfrak{g}(s)$ de la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)} X$ telle que $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}} X = \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)} X |\eta_s|$, $G(s)$ de la mesure de Haar à gauche $\mathrm{d}_{G(s)} x$ tangente, $\mathfrak{g}(s)^*$ de la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*} g$ duale et l'espace homogène $G/G(s)$ de la mesure quotient invariante $\mathrm{d}_{G/G(s)} \dot{x}$, tangente à $|\eta_s|$.

6.7. On garde les notations du numéro précédent. Soit $\mathfrak{j} \in \mathrm{car}(\mathfrak{g}(s))$. Alors, avec les notations du numéro 6.2, la série

$$\sum_{T \in \mathfrak{t}_\Gamma} \breve{\chi}(\exp_{\widetilde{G}} T)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle g, T\rangle} \tag{6.6}$$

converge dans l'espace des fonctions généralisées tempérées sur $\mathfrak{g}^{*\mathrm{j}}$ vers une fonction généralisée positive et $N_G(\mathrm{j})$-invariante, $m^{\mathrm{j}}_{G,\chi}$. De plus, si $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^{*\mathrm{j}}}g$ est une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}^{*\mathrm{j}}$, $\mathrm{d}m^{\mathrm{j}}_{G,\chi} = m^{\mathrm{j}}_{G,\chi}\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^{*\mathrm{j}}}g$ est une mesure de Radon tempérée sur $\mathfrak{g}^{*\mathrm{j}}$, dont la restriction à $\mathfrak{g}(s)^{*\mathrm{j}}_r$ est concentrée sur $\mathfrak{g}(s)^{*\mathrm{j}}_{r,\chi}$. D'autre part, comme l'application $(x,g)\mapsto x.g$ induit un difféomorphisme de l'ouvert $G(s)\times_{N_{G(s)}(\mathrm{j})}\mathfrak{g}(s)^{*\mathrm{j}}_r$ du fibré $G(s)\times_{N_{G(s)}(\mathrm{j})}\mathfrak{g}^{*\mathrm{j}}$ sur l'ouvert $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\mathrm{j}}$, il existe une unique fonction généralisée $m_{G(s),\chi,\mathrm{j}}$, $G(s)$-invariante sur ce dernier ouvert et ayant même restriction que $m^{\mathrm{j}}_{G,\chi}$ à $\mathfrak{g}(s)^{*\mathrm{j}}_r$ (voir, par exemple, [21, Lemme 3.3]). De plus, $m_{G(s),\chi,\mathrm{j}}\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g$ est une mesure de Radon sur $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\mathrm{j}}$, $G(s)$-semi-invariante de poids $\Delta^{-1}_{G(s)}$ et concentrée sur $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi,\mathrm{j}}$ que l'on note $\mathrm{d}m_{G(s),\chi,\mathrm{j}}$. Comme $\mathfrak{g}(s)^*_r$ est réunion disjointe des ouverts $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\mathrm{j}}$, $\mathrm{j}\in\mathrm{Car}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s))$, on prolonge $m_{G(s),\chi,\mathrm{j}}$ (respectivement $\mathrm{d}m_{G(s),\chi,\mathrm{j}}$) en une fonction généralisée (respectivement une mesure de Radon) sur $\mathfrak{g}(s)^*_r$ nulle sur le complémentaire de $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\mathrm{j}}$. On définit alors la fonction généralisée $m_{G(s),\chi}$ (respectivement la mesure de Radon $\mathrm{d}m_{G(s),\chi}$) sur $\mathfrak{g}(s)^*_r$ en posant

$$m_{G(s),\chi} = \sum_{\mathrm{j}\in\mathrm{Car}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s))} m_{G(s),\chi,\mathrm{j}}, \qquad \text{respectivement } \mathrm{d}m_{G(s),\chi} = \sum_{\mathrm{j}\in\mathrm{Car}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s))} \mathrm{d}m_{G(s),\chi,\mathrm{j}}.$$

Enfin, on considère $\mathrm{d}m_{G(s),\chi}$ comme une mesure borélienne sur $\mathfrak{g}(s)^*$ concentrée sur $\mathfrak{g}(s)^*_r$. Alors, $m_{G(s),\chi}$ (respectivement $\mathrm{d}m_{G(s),\chi}$) n'est autre que la fonction généralisée $m_{G(s)^{\tilde{}s},\chi_s}$ (respectivement la mesure $\mathrm{d}m_{G(s)^{\tilde{}s},\chi_s}$) relative au groupe $G(s)^{\tilde{}s}$ et au caractère χ_s définie dans [21, numéro 4.6]. Ainsi, il résulte de [21, Théorème 4.10(i)], que $\mathrm{d}m_{G(s),\chi}$ est une mesure de Radon tempérée, qui est concentrée sur $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$. On en déduit que $m_{G(s),\chi}$ se prolonge de manière naturelle en une fonction généralisée tempérée sur $\mathfrak{g}(s)^*$, encore notée $m_{G(s),\chi}$ et telle que $\mathrm{d}m_{G(s),\chi} = m_{G(s),\chi}\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g$.

Lorsque $s=1$ ou lorsque s centralise G, on le supprime des notations précédentes. En effet, $m_{G(s),\chi}$ est alors la fonction généralisée $m_{G,\chi}$ définie dans [21, numéro 4.6].

6.8. On garde les notations du numéro précédent. Soit $\Gamma'\subset\Gamma$ un sous-groupe d'indice fini et χ' un caractère de Γ'. Nous aurons besoin du résultat suivant donnant une description de $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi'}$ et de $\mathrm{d}m_{G(s),\chi'}$ à l'aide des objets analogues pour le groupe Γ :

Lemme 14. *Soit* $\mathrm{j}\in\mathrm{car}(\mathfrak{g}(s))$ *et J le sous-groupe de Cartan–Duflo correspondant. Alors, on a*

$$\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi',\mathrm{j}} = \bigsqcup_{\substack{\chi\in\Gamma^{\wedge}/((\Gamma\cap J_0)\Gamma')^{\perp}\\ \chi|_{\Gamma'}=\chi'}} \mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi,\mathrm{j}}, \tag{6.7}$$

$$m_{G(s),\chi',\mathrm{j}} = \left[\Gamma\cap J_0 : \Gamma'\cap J_0\right]^{-1} \sum_{\substack{\chi\in\Gamma^{\wedge}/((\Gamma\cap J_0)\Gamma')^{\perp}\\ \chi|_{\Gamma'}=\chi'}} m_{G(s),\chi,\mathrm{j}}. \tag{6.8}$$

Démonstration. La relation (6.7) résulte facilement de la définition des ensembles $\mathfrak{g}(s)^{*\mathfrak{j}}_{r,\chi}$, $\chi \in \Gamma^\wedge$. Pour démontrer la relation (6.8), il suffit de démontrer la même pour la fonction généralisée $m^{\mathfrak{j}}_{G,\chi'}$. Or, utilisant la définition (6.6) et le fait que pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a

$$\sum_{\chi \in \Gamma^\wedge,\ \chi|_{\Gamma'}=\chi'} \chi(\gamma) = \begin{cases} [\Gamma : \Gamma']\,\chi'(\gamma), & \text{si } \gamma \in \Gamma', \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \tag{6.9}$$

il vient

$$m^{\mathfrak{j}}_{G,\chi'} = \left[\Gamma : \Gamma'\right]^{-1} \sum_{T \in \mathfrak{t}_\Gamma} \sum_{\chi \in \Gamma^\wedge,\ \chi|_{\Gamma'}=\chi'} \check{\chi}(\exp_{\widetilde{G}} T) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle ,T\rangle} = \left[\Gamma : \Gamma'\right]^{-1} \sum_{\chi \in \Gamma^\wedge,\ \chi|_{\Gamma'}=\chi'} m^{\mathfrak{j}}_{G,\chi}. \tag{6.10}$$

Mais, il est immédiat que si χ_1 et χ_2 sont deux caractères de Γ, les fonctions généralisées $m^{\mathfrak{j}}_{G,\chi_1}$ et $m^{\mathfrak{j}}_{G,\chi_2}$ sont égales, si et seulement si χ_1 et χ_2 ont même restriction à $\Gamma \cap J_0$. Or, étant donné $\chi \in \Gamma^\wedge$, l'ensemble des caractères de Γ qui ont même restriction que χ à Γ' et à $\Gamma \cap J_0$ a pour cardinal $[\Gamma : (\Gamma \cap J_0)\Gamma']$. Tenant compte de ceci, la formule (6.10) s'écrit

$$m^{\mathfrak{j}}_{G,\chi'} = \left[\Gamma \cap J_0 : \Gamma' \cap J_0\right]^{-1} \sum_{\chi \in \Gamma^\wedge/((\Gamma \cap J_0)\Gamma')^\perp,\ \chi|_{\Gamma'}=\chi'} m^{\mathfrak{j}}_{G,\chi}.$$

D'où le lemme. □

6.9. Afin de mieux comprendre les fonctions généralisées $m_{G,\chi}$ et les mesures canoniques $\mathrm{d}m_{G,\chi}$, nous allons, dans ce numéro et les deux suivants, introduire et donner les propriétés d'un analogue des intégrales orbitales de Harish-Chandra pour $\mathfrak{g}^*$. Nous utiliserons les notations de la Section 5, particulièrement celles concernant les sous-groupes induisants canoniques.

Désignons par κ_V la forme bilinéaire symétrique sur $\mathrm{gl}(V)$ définie par $\kappa_V(X, Y) = \mathrm{Tr}\, XY$.

Lemme 15. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une sous-algèbre de Lie algébrique de* $\mathrm{gl}(V)$.

(i) *Le noyau de la restriction de* κ_V *à* $\mathfrak{g}$ *est égal au radical unipotent* ${}^u\mathfrak{g}$ *de* $\mathfrak{g}$.
(ii) *Soit* $\mathfrak{j}$ *un tore algébrique contenu dans le centre de* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{g}^1$ *l'orthogonal pour* κ_V *de* $\mathfrak{j}$ *dans* $\mathfrak{g}$. *Alors,* $\mathfrak{g}^1$ *est une sous-algèbre de Lie algébrique définie sur* $\mathbb{R}$ *de* $\mathfrak{g}$, *supplémentaire de* $\mathfrak{j}$.

Démonstration. Le noyau $\mathfrak{g}^\perp$ de la restriction de κ_V à $\mathfrak{g}$ est un idéal qui contient ${}^u\mathfrak{g}$, d'après [5, Proposition 1.4.7]. Inversement tout élément $X \in \mathfrak{g}^\perp$ vérifie la relation $\mathrm{Tr}\, X(X_{\mathrm{ell}} - X_{\mathrm{hyp}}) = 0$ et est donc nilpotent. Ceci achève de démontrer le point (i).

Soit $\mathfrak{j}$ un tore algébrique contenu dans le centre de $\mathfrak{g}$. Un calcul immédiat montre que le crochet de deux éléments de $\mathfrak{g}$ est contenu dans l'orthogonal de $\mathfrak{j}$. Il en résulte que $\mathfrak{g}^1$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, supplémentaire de $\mathfrak{j}$ d'après (i). Tout ceci montre en particulier que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est somme directe orthogonale pour κ_V de l'idéal algébrique $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + {}^u\mathfrak{g}$ et du tore facteur réductif de son centre. On se ramène donc à montrer que $\mathfrak{g}^1$ est une sous-algèbre de Lie algébrique définie sur $\mathbb{R}$ dans le cas où $\mathfrak{g}$ est un tore.

Désignons alors par $\boldsymbol{G}$ (respectivement $\boldsymbol{J}$) le tore connexe de $\mathrm{GL}(V)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (respectivement $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$) et identifions le groupe $X_*(\boldsymbol{G})$ (respectivement $X_*(\boldsymbol{J})$) des cocaractères de $\boldsymbol{G}$ (respectivement $\boldsymbol{J}$) avec un réseau de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (respectivement $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$), invariant par conjugaison par rapport au sous-espace réel $\mathfrak{g}$ (respectivement $\mathfrak{j}$), au moyen de l'application qui au cocaractère δ fait correspondre $\delta'(1)$, la valeur en $1 \in \mathbb{C}$ de sa différentielle en l'élément neutre du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^{\times}$. Alors, $X_*(\boldsymbol{J})$ est un sous-module du $\mathbb{Z}$-module $X_*(\boldsymbol{G})$ et la forme κ_V ne prend que des valeurs entières sur ce dernier, comme on le voit facilement en utilisant une base de diagonalisation du tore $\boldsymbol{G}$. Par ailleurs, le groupe des caractères $X^*(\boldsymbol{G})$ de $\boldsymbol{G}$ s'identifie, au moyen de l'application qui à un caractère fait correspondre sa différentielle en l'élément neutre, au réseau dual de $X_*(\boldsymbol{G})$. On voit alors que pour tout $\delta \in X_*(\boldsymbol{G})$, la forme linéaire $f_\delta : X \mapsto \kappa(X, \delta'(1))$ est un élément de $X^*(\boldsymbol{G})$. Mais on a clairement $\mathfrak{g}^1 = \bigcap_{\delta \in X_*(\boldsymbol{J})} \ker f_\delta$. $\square$

Soit $\mathfrak{j} \in \mathrm{car}(\mathfrak{g})$. Il résulte du lemme précédent que l'orthogonal $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1}$ de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ pour la forme bilinéaire symétrique κ_V est une sous-algèbre algébrique, supplémentaire canonique (modulo le choix effectué une fois pour toutes d'une réalisation de $\boldsymbol{G}$ comme sous-groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$ d'un groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$) de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$. On a alors la décomposition en somme directe associée

$$\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}} = (\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1})^* \oplus \mathfrak{j}^* \tag{6.11}$$

et on note $p_{\mathfrak{j}}$ la projection de $\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$ sur $(\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1})^*$ qui s'en déduit.

On a alors le lemme suivant (voir [20, numéro 1, Corollaire 23, Lemmes 26 et 28] pour la partie (a), [20, numéro 2, Théorèmes 30 et 28] pour les parties (b) et (c) et [21, Théorème 4.10] pour la partie (d)).

Lemme 16.

(a) *Soit $g \in \mathfrak{g}_r^*$, $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_g$ et écrivons $g = \lambda + g_1$ avec $\lambda \in \mathfrak{j}^*$ et $g_1 \in (\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1})^*$. Alors,*
  (i) *$\mathfrak{j}$ est une sous-algèbre de Cartan de tout facteur réductif de $\mathfrak{b}_g$ le contenant,*
  (ii) *g_1 est une forme de type unipotent u-équivalente à g avec $\mathfrak{b}_g = \mathfrak{b}_{g_1}$, $g_1|_{{}^u\mathfrak{b}_g} = g|_{{}^u\mathfrak{b}_g}$ et ${}^u(\mathfrak{g}(g_1)) = {}^u(\mathfrak{g}(g))$,*
  (iii) *les éléments de $\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$ de la forme $\mu + g_1$ avec $\mu \in \mathfrak{j}^*$ sont u-équivalents à g et ils admettent $\mathfrak{b}_g$ comme sous-algèbre induisante canonique.*

(b) *Il existe un ouvert de Zariski $\mathscr{V}$ de $\mathfrak{g}_r^*$ non vide, G-invariant ayant les propriétés suivantes* :
  (i) *si $\mathfrak{j} \in \mathrm{car}(\mathfrak{g})$, les facteurs réductifs des B_g dont l'algèbre de Lie contient $\mathfrak{j}$, g parcourant une composante connexe de $\mathscr{V}^{\mathfrak{j}}$, sont deux à deux $Z_G(\mathfrak{j})$-conjugués,*
  (ii) *si $\mathfrak{j} \in \mathrm{car}(\mathfrak{g})$, si $g \in \mathscr{V}^{\mathfrak{j}}$ et si $\mathfrak{r}_g$ est un facteur réductif contenant $\mathfrak{j}$ de $\mathfrak{b}_g$, la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{j} \cap [\mathfrak{r}_g, \mathfrak{r}_g]$ de $[\mathfrak{r}_g, \mathfrak{r}_g]$ et le système de racines $\Delta_{\mathfrak{j},\mathbf{s}}$ de $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{r}_{g\mathbb{C}}$ sont indépendants des choix de ce facteur réductif et de g,*
  (iii) *pour tout $\mathfrak{j} \in \mathrm{car}(\mathfrak{g})$, si $g \in p_{\mathfrak{j}}(\mathscr{V}^{\mathfrak{j}})$ et si $\lambda \in \mathfrak{j}^*$, alors $\lambda + g$ est dans $\mathscr{V}^{\mathfrak{j}}$ si et seulement si $\pi_{\mathfrak{j},\mathbf{s}}(\lambda) \neq 0$, où on a posé $\pi_{\mathfrak{j},\mathbf{s}} = \prod_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{j},\mathbf{s}}^+} H_\alpha$, $\Delta_{\mathfrak{j},\mathbf{s}}^+$ étant un ensemble de racines positives dans $\Delta_{\mathfrak{j},\mathbf{s}}$ et H_α désignant la coracine de α dans $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}} \cap [\mathfrak{r}_g, \mathfrak{r}_g]_{\mathbb{C}}$.*

(c) *Pour tout $\mathfrak{j} \in \mathrm{car}(\mathfrak{g})$, il existe $\pi_{\mathfrak{j},1} \in S(\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1})$ tel que $\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{j}} = \pi_{\mathfrak{j},\mathbf{s}}\pi_{\mathfrak{j},1}$.*

(d) *Soit $\mathscr{V}$ un ouvert de Zariski de $\mathfrak{g}_r^*$ vérifiant les propriétés du* (b). *Alors $\mathscr{V} \cap \mathfrak{g}_{G,\chi}^*$ est de complémentaire $\mathrm{d}m_{G,\chi}$-négligeable dans $\mathfrak{g}_{G,\chi}^*$.*

Désormais, on se donne un ouvert de Zariski $\mathscr{V}$ de $\mathfrak{g}_r^*$ vérifiant les propriétés du (b) du lemme précédent. Lorsque G est réductif on peut prendre $\mathscr{V} = \mathfrak{g}_r^*$.

Lorsqu'il est nécessaire de préciser le groupe G, on désigne les polynômes $\pi_{\mathrm{j},\mathbf{s}}$ et $\pi_{\mathrm{j},1}$ par $\pi_{G,\mathrm{j},\mathbf{s}}$ et $\pi_{G,\mathrm{j},1}$, respectivement.

En fait les propriétés (i) et (ii) du (b) du lemme ci-dessus sont énoncées dans les références citées pour les sous-groupes « acceptables canoniques » au lieu des sous-groupes induisants canoniques : le sous-groupe acceptable canonique associé à une forme linéaire contient le sous-groupe induisant canonique et a même algèbre de Lie (voir [20, numéro 1, Proposition 29]). Mais, il résulte de [20, numéro 2, Remarque 16] et des démonstrations qui suivent que les résultats du Théorème 30 de ce même numéro, et donc les propriétés (b)(i) et (ii) du lemme ci-dessus, sont encore vraies lorsque l'on y remplace le terme « acceptable canonique » par « induisant canonique ».

6.10. On garde les notations du numéro précédent, dont celles du Lemme 16.

Soit $\mathrm{j} \in \mathrm{car}(\mathfrak{g})$. Le nombre $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{\mathrm{j}}$ est un entier pair, indépendant du choix de $\mathrm{j} \in \mathrm{car}(\mathfrak{g})$: on le note $2d_{\mathfrak{g}}$.

On désigne par η_{j} la forme volume sur $\mathfrak{g}^{\mathrm{j}}$ ayant servi à définir le polynôme $\pi_{\mathfrak{g},\mathrm{j}}$ et on munit $\mathfrak{g}^{\mathrm{j}}$ de la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^{\mathrm{j}}}X$ telle que $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}X = \mathrm{d}_{\mathfrak{g}^{\mathrm{j}}}X|\eta_{\mathrm{j}}|$, $\mathfrak{g}^{*\mathrm{j}}$ de la mesure duale $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^{*\mathrm{j}}}g$, $Z_G(\mathrm{j})$ de la mesure de Haar à gauche tangente à $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^{\mathrm{j}}}X$ et l'espace homogène $G/Z_G(\mathrm{j})$ de la mesure quotient invariante $\mathrm{d}_{G/Z_G(\mathrm{j})}\dot{x}$, tangente à $|\eta_{\mathrm{j}}|$.

On choisit des mesures de Lebesgue $\mathrm{d}_{(\mathfrak{g}^{\mathrm{j},1})^*}g$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{j}^*}\lambda$ sur $(\mathfrak{g}^{\mathrm{j},1})^*$ et j^* respectivement telles que $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^{*\mathrm{j}}}g = \mathrm{d}_{(\mathfrak{g}^{\mathrm{j},1})^*}g\,\mathrm{d}_{\mathrm{j}^*}\lambda$. Si $\mathrm{j} \in \mathrm{car}\,\mathfrak{g}$, on désigne par $[\mathscr{V}^{\mathrm{j}}]$ l'ensemble des parties de $\mathscr{V}^{\mathrm{j}}$ qui sont réunion de composantes connexes de $\mathscr{V}^{\mathrm{j}}$ dont les images par la projection p_{j} sur $(\mathfrak{g}^{\mathrm{j},1})^*$ sont deux à deux $Z_G(\mathrm{j})$-conjuguées. Si $\mathscr{W} \in [\mathscr{V}^{\mathrm{j}}]$ et si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$, on pose

$$F^{\mathscr{W}}_{G,\mathrm{j},\varphi}(\lambda) = \pi_{\mathrm{j},\mathbf{s}}(\lambda) \int\limits_{G/Z_G(\mathrm{j})} |\det \mathrm{Ad}\,x|^{-1} \left\{ \int\limits_{p_{\mathrm{j}}(\mathscr{W})} \varphi\big(x.(\lambda+g)\big)\pi_{\mathrm{j},1}(g)^2\, \mathrm{d}_{(\mathfrak{g}^{\mathrm{j},1})^*}g \right\} \mathrm{d}\dot{x}, \quad \lambda \in \mathrm{j}^*. \tag{6.12}$$

Enfin, on pose

$$\mathrm{j}^*_r = \big\{\lambda \in \mathrm{j}^*\colon\ \pi_{\mathrm{j},\mathbf{s}}(\lambda) \neq 0\big\} \tag{6.13}$$

et on désigne par $L^1_\infty(\mathrm{j}^*_r, |\pi_{\mathrm{j},\mathbf{s}}|\mathrm{d}_{\mathrm{j}^*}\lambda)$ l'espace des fonctions sur j^* qui sont $\mathscr{C}^\infty$ sur j^*_r et telles que toutes leurs dérivées sont intégrables pour la mesure $|\pi_{\mathrm{j},\mathbf{s}}|\,\mathrm{d}_{\mathrm{j}^*}\lambda$, muni de la topologie définie par les semi-normes

$$\varphi \mapsto \int\limits_{\mathrm{j}^*} |\partial_p\varphi||\pi_{\mathrm{j},\mathbf{s}}|\,\mathrm{d}_{\mathrm{j}^*}\lambda,$$

$p \in S(\mathrm{j}^*)$, qui en fait un espace de Fréchet.

On a alors le résultat suivant (voir [21, Théorème 3.22])

Proposition 6.10.1. *Soit $\mathscr{W} \in [\mathscr{V}^{\mathrm{j}}]$. Alors, pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$ et tout $\lambda \in \mathrm{j}^*_r$, l'intégrale* (6.12) *est absolument convergente et $F^{\mathscr{W}}_{G,\mathrm{j},\varphi}$ est un élément de $L^1_\infty(\mathrm{j}^*_r, |\pi_{\mathrm{j},\mathbf{s}}|\,\mathrm{d}_{\mathrm{j}^*}\lambda)$. De plus, l'application $\varphi \mapsto F^{\mathscr{W}}_{G,\mathrm{j},\varphi}$ est un morphisme continu sur $\mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$ à valeurs dans $L^1_\infty(\mathrm{j}^*_r, |\pi_{\mathrm{j},\mathbf{s}}|\,\mathrm{d}_{\mathrm{j}^*}\lambda)$.*

Lorsque G est réductif, $\mathfrak{j}_r^* = \mathfrak{j}^* \cap \mathfrak{g}_r^*$ et c'est l'unique élément de $[\mathscr{V}^{\mathfrak{j}}]$, de sorte que l'on écrit simplement $F_{G,\mathfrak{j},\varphi}$ au lieu de $F_{G,\mathfrak{j},\varphi}^{\mathfrak{j}_r^*}$. Dans ce cas les fonctions $F_{G,\mathfrak{j},\varphi}$ sont les intégrales orbitales introduites par Harish-Chandra pour lesquelles il a établi un résultat plus précis que le Lemme 31 (voir, par exemple, [35, pp. 39 et 50]).

Posons

$$\mathfrak{j}_{\Gamma,\chi}^* = \{\lambda \in \mathfrak{j}^* \colon \lambda|_{\mathfrak{t}} \in \mathfrak{t}_{\Gamma,\chi}^*\},$$
$$\mathfrak{j}_{G,\Gamma,\chi}^* = \{\lambda \in \mathfrak{j}_{\Gamma,\chi}^* \colon \pi_{G,\mathfrak{j},\mathbf{s}}(\lambda) \neq 0\}.$$

Avec les notations du numéro 6.2 et du précédent, on a

$$\mathscr{V} \cap \mathfrak{g}_{G,\chi}^{*\mathfrak{j}} = \mathfrak{j}_{G,\Gamma,\chi}^* + p_{\mathfrak{j}}(\mathscr{V}^{\mathfrak{j}}) \subset \mathfrak{g}_{G,\chi}^{*\mathfrak{j}} = (\mathfrak{j}_{\Gamma,\chi}^* + (\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1})^*) \cap \mathfrak{g}_r^*.$$

Alors, la série

$$\sum_{T \in \mathfrak{t}_\Gamma} \breve{\chi}(\exp_{\widetilde{G}} T) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\lambda, T\rangle}$$

converge dans l'espace des fonctions généralisées tempérées sur $\mathfrak{j}^*$ vers une fonction généralisée positive $N_G(\mathfrak{j})$-invariante, $m_{\Gamma,\chi}^{\mathfrak{j}}$, telle que $\mathrm{d}m_{\Gamma,\chi}^{\mathfrak{j}} = m_{\Gamma,\chi}^{\mathfrak{j}}\, \mathrm{d}_{\mathfrak{j}^*}\lambda$ soit une mesure de Radon tempérée. De plus, il est immédiat que les mesures $\mathrm{d}m_{G,\chi}^{\mathfrak{j}}$ et $\mathrm{d}m_{\Gamma,\chi}^{\mathfrak{j}}$ sont reliées par :

$$\mathrm{d}m_{G,\chi}^{\mathfrak{j}} = \mathrm{d}m_{\Gamma,\chi}^{\mathfrak{j}}\, \mathrm{d}_{(\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1})^*} g. \tag{6.14}$$

Nous allons, pour des besoins ultérieurs, donner une description de la mesure $\mathrm{d}m_{\Gamma,\chi}^{\mathfrak{j}}$. On note $\mathfrak{a}$ la partie déployée de $\mathfrak{j}$ de sorte que $\mathfrak{j} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{j}^* = \mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{a}^*$. On choisit des mesures de Lebesgue $\mathrm{d}_{\mathfrak{t}^*}\mu$ et $\mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*}\nu$ sur $\mathfrak{t}^*$ et $\mathfrak{a}^*$ respectivement telles que $\mathrm{d}_{\mathfrak{j}^*}\lambda = \mathrm{d}_{\mathfrak{t}^*}\mu\, \mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*}\nu$. Enfin, on désigne par $\mathrm{vol}(\mathfrak{t}_\Gamma)$ le volume du réseau $\mathfrak{t}_\Gamma$ relativement à la mesure $\mathrm{d}_{\mathfrak{t}^*}\mu$: si $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base de $\mathfrak{t}_\Gamma$, $\mathrm{vol}(\mathfrak{t}_\Gamma)$ est le volume, pour la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{t}$ dont $\mathrm{d}_{\mathfrak{t}^*}\mu$ est la mesure duale, de la maille $\{t_1e_1 + \cdots + t_ne_n \colon 0 \leqslant t_j < 1, 1 \leqslant j \leqslant k\}$ de $\mathfrak{t}_\Gamma$. Avec ces notations, on a

$$\int_{\mathfrak{j}^*} \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}m_{\Gamma,\chi}^{\mathfrak{j}}(\lambda) = \mathrm{vol}(\mathfrak{t}_\Gamma)^{-1} \sum_{\mu \in \mathfrak{t}_{\Gamma,\chi}^*} \int_{\mathfrak{a}^*} \varphi(\mu + \nu)\, \mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*}\nu. \tag{6.15}$$

L'intérêt de considérer les intégrales « orbitales » $F_{G,\mathfrak{j},\varphi}^{\mathscr{W}}$ provient alors de ce qu'elles vérifient, pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$, la relation suivante

$$\int_{\mathfrak{g}^*} \varphi\, \mathrm{d}m_{G,\chi} = (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} \sum_{\mathfrak{j} \in \mathrm{Car}_G(\mathfrak{g})} [W(G,\mathfrak{j})]^{-1} \sum_{\mathscr{W} \in [\mathscr{V}^{\mathfrak{j}}]} \int_{\mathfrak{j}^*} F_{G,\mathfrak{j},\varphi}^{\mathscr{W}}(\lambda) \pi_{\mathfrak{j},\mathbf{s}}(\lambda)\, \mathrm{d}m_{\Gamma,\chi}^{\mathfrak{j}}(\lambda).$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Lemme 17. *Soit q une fonction G-invariante et $\mathrm{d}m_{G,\chi}$-mesurable sur $\mathfrak{g}_{G,\chi}^*$ telle que pour tout* $\mathfrak{j} \in \mathrm{car}(\mathfrak{g})$ *et tout $g \in \mathscr{V}^{\mathfrak{j}}$, $q(g)$ ne dépende que de la composante connexe de g dans $\mathscr{V}^{\mathfrak{j}}$ et de la* *restriction λ de g à $\mathfrak{j}$, de sorte que l'on puisse écrire $q(g) = q_{\mathscr{W}}(\lambda)$, où $\mathscr{W}$ est l'élément de $[\mathscr{V}^{\mathfrak{j}}]$ contenant g.*

(i) *Si la mesure $|q|\,\mathrm{d}m_{G,\chi}$ est tempérée, on a*

$$\int_{\mathfrak{g}^*} \varphi(g)q(g)\,\mathrm{d}m_{G,\chi}(g) = (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} \sum_{\mathfrak{j}\in \mathrm{Car}_G(\mathfrak{g})} \big[W(G,\mathfrak{j})\big]^{-1} \sum_{\mathscr{W}\in[\mathscr{V}^{\mathfrak{j}}]} \int_{\mathfrak{j}^*_{\Gamma,\chi}} F^{\mathscr{W}}_{G,\mathfrak{j},\varphi}(\lambda) \times q_{\mathscr{W}}(\lambda)\pi_{\mathfrak{j},\mathbf{s}}(\lambda)\,\mathrm{d}m^{\mathfrak{j}}_{\Gamma,\chi}(\lambda), \quad \varphi\in\mathscr{S}\big(\mathfrak{g}^*\big). \tag{6.16}$$

(ii) *Réciproquement, on suppose que pour tout $\mathfrak{j}\in \mathrm{Car}_G(\mathfrak{g})$ et tout $\mathscr{W}\in[\mathscr{V}^{\mathfrak{j}}]$, il existe une semi-norme η continue sur $\mathscr{S}(\mathfrak{g}^*)$ telle que*

$$\int_{\mathfrak{j}^*_{\Gamma,\chi}} \big|F^{\mathscr{W}}_{G,\mathfrak{j},\varphi}(\lambda)\big|\big|q_{\mathscr{W}}(\lambda)\big|\big|\pi_{\mathfrak{j},\mathbf{s}}(\lambda)\big|\,\mathrm{d}m^{\mathfrak{j}}_{\Gamma,\chi}(\lambda)\leqslant \eta(\varphi), \quad \varphi\in\mathscr{S}\big(\mathfrak{g}^*\big).$$

Alors, $|q|\,\mathrm{d}m_{G,\chi}$ est une mesure tempérée.

Démonstration. L'assertion (i) est une conséquence facile des hypothèses, de la relation (6.14) et de [21, Lemme 3.3]. La démonstration dans un cas particulier de l'assertion (ii), qui se trouve dans [34, p. 140], est valable en toute généralité. □

De même, on montre que si Θ est une fonction G-invariante localement intégrable et tempérée sur $\mathfrak{g}^*$ telle que, pour tout $\mathfrak{j}\in \mathrm{car}(\mathfrak{g})$ et tout $g\in\mathscr{V}^{\mathfrak{j}}$, $\Theta(g)$ ne dépende que de la composante connexe de g dans $\mathscr{V}^{\mathfrak{j}}$ et de la restriction λ de g à $\mathfrak{j}$, de sorte que l'on puisse écrire $\Theta(g) = \Theta_{\mathscr{W}}(\lambda)$, où $\mathscr{W}$ est l'élément de $[\mathscr{V}^{\mathfrak{j}}]$ contenant g, on a

$$\int_{\mathfrak{g}^*} \varphi(g)\Theta(g)\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^*}g = (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} \sum_{\mathfrak{j}\in \mathrm{Car}_G(\mathfrak{g})} \big[W(G,\mathfrak{j})\big]^{-1} \sum_{\mathscr{W}\in[\mathscr{V}^{\mathfrak{j}}]} \int_{\mathfrak{j}^*} F^{\mathscr{W}}_{G,\mathfrak{j},\varphi}(\lambda) \times \Theta_{\mathscr{W}}(\lambda)\pi_{\mathfrak{j},\mathbf{s}}(\lambda)\,\mathrm{d}_{\mathfrak{j}^*}\lambda, \quad \varphi\in\mathscr{S}\big(\mathfrak{g}^*\big). \tag{6.17}$$

6.11. Dans ce numéro, on construit une mesure « de Plancherel » sur l'espace des orbites $G\setminus\mathfrak{g}^*_{G,\chi}$. Cette mesure est presque canonique, en ce sens qu'elle ne dépend que du choix d'une fonction borélienne positive sur $\mathfrak{g}^*_r$ semi-invariante de poids $\Delta_G^{-1/2}$ dont l'existence est assurée par le lemme suivant.

Lemme 18. *Il existe une fonction ψ_G borélienne positive sur $\mathfrak{g}^*$, strictement positive sur $\mathfrak{g}^*_r$ et telle que, pour tout $g\in\mathfrak{g}^*$ et tout $x\in G$, $\psi_G(x.g) = \Delta_G(x)^{1/2}\psi_G(g)$. De plus, on peut supposer que, pour un bon choix de l'ouvert de Zariski $\mathscr{V}$ du* (b) *du Lemme* 16, *la restriction de ψ_G à $\mathscr{V}$ est continue.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{j}\in \mathrm{car}\,\mathfrak{g}$. D'après [31], il existe une stratification de $\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}_{\mathbb{C},r}$ par des sous-variétés algébriques lisses $N_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{j})$-invariantes définies sur $\mathbb{R}$, $U_0,\ldots,U_n$ telles que :

(i) $\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}_{\mathbb{C},r} = \bigsqcup_{j=0}^{j=n} U_j$,
(ii) $\bigsqcup_{j=k}^{n} U_j$, $0 \leqslant k \leqslant n$, soit fermé dans $\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}_{\mathbb{C},r}$ pour la topologie de Zariski,
(iii) pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $Z_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{j}) \setminus U_k$ possède une structure de variété algébrique lisse définie sur $\mathbb{R}$ telle que la projection naturelle $p_k : U_k \to Z_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{j}) \setminus U_k$ soit un morphisme lisse défini sur $\mathbb{R}$ et donc une submersion de variétés analytiques complexes,
(iv) l'image de $\boldsymbol{G} \times U_0$ par l'application $\gamma(x, g) = x.g$ contient un ouvert de Zariski de $\mathfrak{g}^{*}_{\mathbb{C},r}$ dont l'ensemble des points réels a les propriétés du Lemme 16(b) (comme $N_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{j})$ laisse invariant $\mathfrak{j}^{*}_{\mathbb{C}}$, l'action de $Z_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{j})$ y étant triviale, on peut choisir l'ouvert U_0 tel que $U_0 = (U_0 + \mathfrak{j}^{*}_{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{g}^{*}_{\mathbb{C},r}$).

En fait, [31] ne fournit à priori que des variétés $Z_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{j})$-invariantes. Il suffit alors de remplacer, à chaque étape de la construction, la variété obtenue U_k par $\bigcap_{x \in N_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{j})/Z_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{j})} x.U_k$.

Fixons $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors, on peut trouver un recouvrement ouvert localement fini $(V_{k,\alpha})_{\alpha \in A_k}$ de $Z_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{j}) \setminus U_k$ pour la topologie analytique et pour chaque $\alpha \in A_k$, une section analytique $\sigma_{k,\alpha} : V_{k,\alpha} \to U_k$ de p_k. Soit également $(\varphi_{k,\alpha})_{\alpha \in A_k}$ une partition indéfiniment différentiable de l'unité subordonnée au recouvrement $(V_{k,\alpha})_{\alpha \in A_k}$.

Comme pour tout $g \in \mathfrak{g}^{*}_{\mathbb{C},r}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(g)$ est une algèbre de Lie abélienne, l'action de $\boldsymbol{G}(g)$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est unimodulaire. On voit alors qu'étant donné $\alpha \in A_k$, on définit une fonction $\phi_{k,\alpha}$ à valeurs strictement positives sur $p_k^{-1}(V_{k,\alpha})$ en posant, pour $\omega \in V_{k,\alpha}$ et $x \in Z_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{j})$,

$$\phi_{k,\alpha}\big(x.\sigma_{k,\alpha}(\omega)\big) = |\det \operatorname{Ad} x|^{-\frac{1}{2}}.$$

Par ailleurs, l'application $(x, \omega) \mapsto x.\sigma_{k,\alpha}(\omega)$ étant une submersion de $Z_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{j}) \times V_{k,\alpha}$ sur $p_k^{-1}(V_{k,\alpha})$, on voit que la fonction $\phi_{k,\alpha}$ est analytique. On définit alors une fonction ϕ_k indéfiniment différentiable et à valeurs strictement positives sur U_k en posant

$$\phi_k(g) = \sum_{\alpha \in A_k} \varphi_{k,\alpha} \circ p_k(g) \phi_{k,\alpha}(g), \quad g \in U_k.$$

Un simple calcul montre que ϕ_k vérifie la relation de covariance

$$\phi_k(x.g) = |\det \operatorname{Ad} x|^{-\frac{1}{2}} \phi_k(g), \quad x \in Z_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{j}),\ g \in U_k.$$

On définit ensuite une fonction ϕ à valeurs strictement positives, borélienne sur $\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}_{\mathbb{C},r}$ et vérifiant la même relation de covariance, en décidant que $\phi|_{U_k} = \phi_k$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

Maintenant, soit $x_1, \ldots, x_l$ un ensemble de représentants dans $N_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{j})$ de $N_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{j})/Z_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{j})$. On pose alors :

$$\psi(g) = \sum_{j=1}^{j=l} |\det \operatorname{Ad} x_j|^{-\frac{1}{2}} \phi\big(x_j^{-1}.g\big), \quad g \in \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}_{\mathbb{C},r}.$$

Il est clair ψ est une fonction à valeurs strictement positives, borélienne sur $\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}_{\mathbb{C},r}$, dont la restriction à chacune des sous-variétés algébriques lisses U_k est continue et qui vérifie la relation de covariance :

$$\psi(x.g) = |\det \operatorname{Ad} x|^{-\frac{1}{2}} \psi(g), \quad x \in N_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{j}),\ g \in \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}_{\mathbb{C},r}.$$

On définit alors une fonction $\psi_{\boldsymbol{G}}$ sur $\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C},r}$ en décidant que :

$$\psi_{\boldsymbol{G}}(x.g) = |\det \operatorname{Ad} x|^{-\frac{1}{2}}\psi(g), \quad x \in \boldsymbol{G},\ g \in \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}_{\mathbb{C},r}.$$

Comme γ induit un morphisme lisse de l'ouvert de Zariski $\boldsymbol{G} \times_{N_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{j})} \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}_{r,\mathbb{C}}$ du fibré algébrique $\boldsymbol{G} \times_{N_{\boldsymbol{G}}(\mathfrak{j})} \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}_{\mathbb{C}}$ sur $\mathfrak{g}^*_{r,\mathbb{C}}$, les ensembles $V_k = \gamma(\boldsymbol{G} \times U_k)$ sont des sous-variétés algébriques lisses de $\mathfrak{g}^*_{r,\mathbb{C}}$ et la restriction de la fonction $\psi_{\boldsymbol{G}}$ à chacun des V_k est continue.

Il est alors clair que la restriction de $\psi_{\boldsymbol{G}}$ à $\mathfrak{g}^*_r$ est la fonction ψ_G cherchée. □

Désormais on se donne une fonction ψ_G et un ouvert de Zariski $\mathscr{V}$ de $\mathfrak{g}^*$ comme dans le Lemme 18. Lorsque G est unimodulaire, on prendra $\psi_G \equiv 1$.

Lemme 19.

(i) *Si φ est une fonction borélienne positive sur $\mathfrak{g}^*_r$, l'application*

$$\Omega \mapsto \int_{\Omega} \varphi(g)\psi_G^2(g)\,\mathrm{d}\beta_\Omega(g)$$

est une fonction borélienne sur l'espace mesurable quotient $G \setminus \mathfrak{g}^*_r$.

(ii) *Il existe sur l'espace quotient $G \setminus \mathfrak{g}^*_r$ une unique mesure borélienne σ-finie $\mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}$, supportée par $G \setminus \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$ et telle que pour, toute fonction borélienne positive φ sur $\mathfrak{g}^*_{G,\chi}$, on ait*

$$\int_{\mathfrak{g}^*_{G,\chi}} \varphi(g)\,\mathrm{d}m_{G,\chi}(g) = \int_{G\setminus\mathfrak{g}^*_{G,\chi}} \left\{\int_{\Omega} \varphi(g)\psi_G^2(g)\,\mathrm{d}\beta_\Omega(g)\right\}\mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}(\Omega). \tag{6.18}$$

Lorsque G est unimodulaire, la mesure $\mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}$ est notée plus simplement $\mathrm{d}\mu_{G,\chi}$.

Les assertions (i) et (ii) du lemme se démontrent comme dans [12, Proposition 5.1.4 et Lemme 5.1.7].

Le fait que la mesure $\mathrm{d}m_{G,\chi}$ est tempérée et la formule (6.18) entrainent le :

Corollaire 6.11.1. *Avec les notations précédentes, pour $\mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}$-presque toute orbite Ω dans $G \setminus \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$, la mesure $\psi_G^2\,\mathrm{d}\beta_\Omega$ est tempérée.*

6.12. Le résultat suivant met en relation les mesures $\mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}$ et $\mathrm{d}m_{G(s),\chi}$, $s \in G_{\mathrm{ell,bp}}$.

Lemme 20. *Soit $s \in G_{\mathrm{ell,bp}}$. Alors, si φ est une fonction positive borélienne (respectivement $|\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}|\,\mathrm{d}m_{G(s),\chi}$-intégrable) sur $\mathfrak{g}(s)^*$, l'application*

$$\Omega \mapsto \int_{\Omega^s} \varphi(g)\psi_G^2(g)\,\mathrm{d}\beta_{\Omega^s}(g)$$

est une fonction borélienne (respectivement $\mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}$-intégrable) sur $G \setminus \mathfrak{g}^*_r$ et on a

$$\int_{G\backslash\mathfrak{g}^*_{G,\chi}} \left\{ \int_{\Omega^s} \varphi(g)\psi_G^2(g)\,\mathrm{d}\beta_{\Omega^s}(g) \right\} \mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}(\Omega)$$
$$= (2\pi)^{-(d_{\mathfrak{g}}-d_{\mathfrak{g}(s)})} \int_{\mathfrak{g}(s)^*} \varphi(g)\left|\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(g)\right| \mathrm{d}m_{G(s),\chi}(g). \tag{6.19}$$

Démonstration. Il suffit de montrer la partie du lemme concernant les fonctions boréliennes positives. Cela dit, soit $\mathrm{j} \in \mathrm{car}(\mathfrak{g}(s))$. Si A est une partie de $\mathfrak{g}(s)^*_r$, on pose $A_{\mathrm{j}} = A \cap \mathfrak{g}(s)^*_{r,\mathrm{j}}$. Si Ω est une G-orbite dans $\mathfrak{g}^*_r$, Ω^s_{j} est une réunion finie de $G(s)$-orbites coadjointes de sorte que la mesure de Liouville $\mathrm{d}_{\beta_{\Omega^s_{\mathrm{j}}}}$ est bien définie. Alors, pour toute fonction borélienne positive φ sur $\mathfrak{g}(s)^*$ et toute G-orbite $\Omega \subset \mathfrak{g}^*_r$, on a

$$\int_{\Omega^s} \varphi(g)\psi_G^2(g)\,\mathrm{d}\beta_{\Omega^s}(g) = \sum_{\mathrm{j}\in \mathrm{Car}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s))} \int_{\Omega^s_{\mathrm{j}}} \varphi(g)\psi_G^2(g)\,\mathrm{d}\beta_{\Omega^s_{\mathrm{j}}}(g).$$

D'autre part, comme les G-orbites dans $\mathfrak{g}^*_r$ sont localement fermées et toutes de même dimension, elles y sont toutes fermées, de sorte que pour tout $\Omega \in G \setminus \mathfrak{g}^*_r$, l'on a

$$\int_{\Omega} |\varphi|\psi_G^2\,\mathrm{d}\beta_{\Omega} < +\infty, \quad \varphi \in \mathscr{D}\big(\mathfrak{g}^*_r\big) \qquad \int_{\Omega^s} |\varphi|\psi_G^2\,\mathrm{d}\beta_{\Omega^s} < +\infty, \quad \varphi \in \mathscr{D}\big(\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr}}\big).$$

Il s'ensuit qu'il suffit de démontrer, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathrm{j}})$, les assertions suivantes :

$$\text{l'application}\quad \Omega \mapsto \int_{\Omega^s_{\mathrm{j}}} \varphi(g)\psi_G^2(g)\,\mathrm{d}\beta_{\Omega^s_{\mathrm{j}}}(g) \quad \text{est borélienne,} \tag{6.20}$$

et

$$\int_{G\backslash\mathfrak{g}^*_{G,\chi,\mathrm{j}}} \left\{ \int_{\Omega^s_{\mathrm{j}}} \varphi(g)\psi_G^2(g)\,\mathrm{d}\beta_{\Omega^s_{\mathrm{j}}}(g) \right\} \mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}(\Omega)$$
$$= (2\pi)^{-(d_{\mathfrak{g}}-d_{\mathfrak{g}(s)})} \int_{\mathfrak{g}(s)^*_{r,\mathrm{j}}} \varphi(g)\left|\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(g)\right| \mathrm{d}m_{G(s),\chi,\mathrm{j}}(g). \tag{6.21}$$

En effet, en utilisant le théorème de convergence dominée, on montre facilement que, si les assertions (6.20) et (6.21) sont satisfaites par les fonctions $\varphi \in \mathscr{D}(\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathrm{j}})$, elles sont satisfaites par les fonctions caractéristiques des ouverts et des compacts, puis par celles des fermés de $\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathrm{j}}$. De même, on voit que, si U est un ouvert relativement compact de $\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathrm{j}}$, l'ensemble de ses parties boréliennes dont la fonction caractéristique satisfait (6.20) et (6.21) est une classe monotone ; par suite, toute fonction caractéristique d'une partie borélienne de U et donc, encore par le théorème de convergence dominée, toute fonction borélienne positive sur $\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathrm{j}}$, vérifie (6.20) et (6.21).

L'application $(x,g)\mapsto x.g$ induit un revêtement à $[W(G,\mathfrak{j})]$-feuillets (respectivement $[W(G(s),\mathfrak{j})]$-feuillets) de $G\times_{Z_G(\mathfrak{j})}\mathfrak{g}_r^{*\mathfrak{j}}$ (respectivement $G(s)\times_{Z_{G(s)}(\mathfrak{j})}\mathfrak{g}_r^{*\mathfrak{j}}$) sur $\mathfrak{g}^*_{r,\mathfrak{j}}$ (respectivement $\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}$). On en déduit que l'application $(x,g)\mapsto x.g$ induit un revêtement à $[W(G,\mathfrak{j})/W(G(s),\mathfrak{j})]$-feuillets de $G\times_{G(s)}\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}$ sur $\mathfrak{g}^*_{r,\mathfrak{j}}$. Un calcul de jacobien montre alors que pour toute fonction φ mesurable positive ou intégrable sur $\mathfrak{g}^*_{r,\mathfrak{j}}$, on a

$$\int_{\mathfrak{g}^*_{r,\mathfrak{j}}}\varphi(g)\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^*}g=(2\pi)^{-2(d_\mathfrak{g}-d_{\mathfrak{g}(s)})}\big[W(G,\mathfrak{j})/W\big(G(s),\mathfrak{j}\big)\big]^{-1}$$
$$\times\int_{G/G(s)}|\det\mathrm{Ad}\,x|^{-1}\left\{\int_{\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}}\varphi(x.g)\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(g)^2\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g\right\}\mathrm{d}\dot{x},$$

où $\mathrm{d}_{G/G(s)}\dot{x}$ est la mesure quotient introduite au numéro 6.6.

On en déduit aussi que toute fonction généralisée θ, G-invariante sur $\mathfrak{g}^*_{r,\mathfrak{j}}$, possède une restriction $\theta|_{\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}}$ à $\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}$ et que l'application $\theta\mapsto\theta|_{\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}}$ induit une bijection, bi-continue pour la topologie faible, de l'espace des fonctions généralisées G-invariantes sur $\mathfrak{g}^*_{r,\mathfrak{j}}$ sur l'espace des fonctions généralisées $G(s)$-invariantes sur $\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}$ dont la restriction à $\mathfrak{g}_r^{*,\mathfrak{j}}$ est $N_G(\mathfrak{j})$-invariante. L'application $\theta\mapsto\theta|_{\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}}$ est entièrement déterminée par :

$$\int_{\mathfrak{g}^*_{r,\mathfrak{j}}}\varphi(g)\theta(g)\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^*}g=(2\pi)^{-2(d_\mathfrak{g}-d_{\mathfrak{g}(s)})}\big[W(G,\mathfrak{j})/W\big(G(s),\mathfrak{j}\big)\big]^{-1}\int_{G/G(s)}|\det\mathrm{Ad}\,x|^{-1}$$
$$\times\left\{\int_{\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}}\varphi(x.g)\theta|_{\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}}(g)\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(g)^2\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g\right\}\mathrm{d}\dot{x},$$
$$\varphi\in\mathscr{D}\big(\mathfrak{g}^*_{r,\mathfrak{j}}\big). \tag{6.22}$$

La formule (6.22) généralise celle déjà obtenue par Duflo pour les fonctions généralisées invariantes dans le cas où $G(s)=Z_G(\mathfrak{j})$ (voir, par exemple, [21, Lemme 3.3]).

Soit Ω une G-orbite coadjointe contenue dans $\mathfrak{g}^*_{r,\mathfrak{j}}$. On définit la fonction généralisée G-invariante F_Ω sur $\mathfrak{g}^*_{r,\mathfrak{j}}$ en posant :

$$F_\Omega(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^*}g)=\int_\Omega\varphi(g)\psi_G^2(g)\,\mathrm{d}\beta_\Omega(g),\quad \varphi\in\mathscr{D}\big(\mathfrak{g}^*_{r,\mathfrak{j}}\big).$$

Nous allons calculer la restriction de F_Ω à $\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}$. Soit donc $l\in\Omega\cap\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$ et soit $\omega_l\subset\Omega\cap\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}$ la $G(s)$-orbite coadjointe de l. Tout d'abord, on a

$$F_\Omega(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^*}g)=\big[G(l)/G(l)_0\big]^{-1}\int_{G/G(l)_0}\varphi(x.l)\psi_G^2(x.l)\,\mathrm{d}\dot{x},\quad \varphi\in\mathscr{D}\big(\mathfrak{g}^*_{r,\mathfrak{j}}\big),$$

où $\mathrm{d}\dot{x}$ est la mesure invariante sur $G/G(l)_0$ tangente à $|\eta|$, où η est une forme volume sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)$ telle que, si $X_1, \ldots, X_{2n}$ est une base de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)$ univolumique pour η, on ait

$$(2\pi)^{-2n} \det\big(\langle l, [X_i, X_j]\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant 2n} = 1.$$

Par ailleurs, comme $l \in \mathfrak{g}_r^{*\mathfrak{j}}$, on a $G(l)_0 \subset Z_G(\mathfrak{j}) \subset G(s)$. On en déduit facilement que, pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathfrak{g}^*_{r,\mathfrak{j}})$, l'on a

$$F_\Omega(\varphi\, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}^*} g) = \big[G(l)/G(l)\cap G(s)\big]^{-1} \int\limits_{G/G(s)} |\det \operatorname{Ad} x|^{-1} \left\{ \int\limits_{\omega_l} \varphi(x.g)\psi_G^2(g)\delta(g)\, \mathrm{d}\beta_{\omega_l}(g) \right\} \mathrm{d}'\dot{x},$$

où $\mathrm{d}'\dot{x}$ est la mesure invariante sur $G/G(s)$ tangente à $|\eta'|$, où η' est une forme volume sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(s)$ telle que, si $X'_1, \ldots, X'_{2(d_\mathfrak{g}-d_{\mathfrak{g}(s)})}$ est une base de $\mathfrak{g}_s = (1-\operatorname{Ad} s)\mathfrak{g}$ dont l'image dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(s)$ soit univolumique pour η', on ait

$$(2\pi)^{-2(d_\mathfrak{g}-d_{\mathfrak{g}(s)})} \det\big(\langle l, \big[X'_i, X'_j\big]\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant 2(d_\mathfrak{g}-d_{\mathfrak{g}(s)})} = 1$$

et où

$$\delta(y.l) = |\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(s)} y|^{-1}, \quad y \in G(s).$$

Il existe $c > 0$ tel que $\mathrm{d}'\dot{x} = c\, \mathrm{d}_{G/G(s)}\dot{x}$. Ce nombre c est donc tel que $\eta' = c\eta_s$. Ainsi, si on pose $p = 2(d_\mathfrak{g} - d_{\mathfrak{g}(s)})$, l'image du système de vecteurs $c^{1/p}X'_1, \ldots, c^{1/p}X'_p$ dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(s)$ est une base univolumique pour η_s, de sorte que l'on a

$$\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(l)^2 = c^2 \det\big(\langle l, \big[X'_i, X'_j\big]\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p} = (2\pi)^{2(d_\mathfrak{g}-d_{\mathfrak{g}(s)})} c^2,$$

si bien que

$$c = (2\pi)^{-(d_\mathfrak{g}-d_{\mathfrak{g}(s)})} \big|\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(l)\big|.$$

Alors compte tenu de la relation (6.4), on trouve que, pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathfrak{g}^*_{r,\mathfrak{j}})$,

$$\begin{aligned}&\big[G(l)/G(l)\cap G(s)\big] F_\Omega(\varphi\, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}^*} g)\\ &\quad = (2\pi)^{-(d_\mathfrak{g}-d_{\mathfrak{g}(s)})} \int\limits_{G/G(s)} |\det \operatorname{Ad} x|^{-1} \left\{ \int\limits_{\omega_l} \varphi(x.g)\psi_G^2(g)\big|\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(g)\big|\, \mathrm{d}\beta_{\omega_l}(g) \right\} \mathrm{d}\dot{x}. \qquad (6.23)\end{aligned}$$

Il est clair que cette dernière formule, reste valable si l'on y remplace l'orbite ω_l par n'importe quelle $G(s)$-orbite ω' contenue dans $\Omega \cap \mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}$ et l par n'importe quel point $l' \in \omega' \cap \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$. Or, l'ensemble des $G(s)$-orbites contenues dans $\Omega \cap \mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}$ est en bijection avec l'ensemble $N_{G(s)}(\mathfrak{j}) \setminus N_G(\mathfrak{j})/G(l)$: à la double classe $\dot{x} \in N_{G(s)}(\mathfrak{j}) \setminus N_G(\mathfrak{j})/G(l)$ représentant $x \in N_G(\mathfrak{j})$, correspond l'orbite $\omega_{x.l} = G(s).x.l$. De plus, si $x \in N_G(\mathfrak{j})$, la $G(l)$-orbite à droite de $N_{G(s)}(\mathfrak{j}).x$ a pour cardinal $[G(x.l)/G(x.l)\cap G(s)]$, de sorte que l'on a

$$\big[W(G,\mathfrak{j})/W\big(G(s),\mathfrak{j}\big)\big] = \sum_{x\in N_{G(s)}(\mathfrak{j})\setminus N_G(\mathfrak{j})/G(l)} \big[G(x.l)/G(x.l)\cap G(s)\big].$$

Sommant alors l'égalité (6.23) sur les $G(s)$-orbites dans $\Omega \cap \mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}$, on obtient finalement, pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathfrak{g}^*_{r,\mathfrak{j}})$,

$$F_\Omega(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^*}g) = (2\pi)^{-2(d_\mathfrak{g}-d_{\mathfrak{g}(s)})}\big[W(G,\mathfrak{j})/W\big(G(s),\mathfrak{j}\big)\big]^{-1}$$
$$\times \int\limits_{G/G(s)} |\det \mathrm{Ad}\,x|^{-1}\Bigg\{\int\limits_{\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}} \varphi(x.g)\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(g)^2 F^s_{\Omega,\mathfrak{j}}(g)\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g\Bigg\}\,\mathrm{d}\dot{x}, \quad (6.24)$$

où on a posé

$$F^s_{\Omega,\mathfrak{j}} = (2\pi)^{(d_\mathfrak{g}-d_{\mathfrak{g}(s)})}|\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}|^{-1}\psi_G^2\,\mathrm{d}\beta_{\Omega^s_\mathfrak{j}}/\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g.$$

Comme les $G(s)$-orbites dans $\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}$ sont toutes de même dimension et donc fermées, on voit que $F^s_{\Omega,\mathfrak{j}}$ est une fonction généralisée $G(s)$-invariante sur $\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}$. De plus, les mêmes calculs que ceux effectués pour établir que F_Ω satisfait la relation (6.24), montrent qu'elle vérifie, pour un bon choix de la mesure invariante $\mathrm{d}_{G(s)/Z_G(\mathfrak{j})}\dot{x}$,

$$F^s_{\Omega,\mathfrak{j}}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g) = (2\pi)^{(d_\mathfrak{g}-2d_{\mathfrak{g}(s)})}\big[W\big(G(s),\mathfrak{j}\big)\big]^{-1}\int\limits_{G(s)/Z_G(\mathfrak{j})} |\det\nolimits_{\mathfrak{g}(s)}\mathrm{Ad}\,x|^{-1}$$
$$\times\Bigg\{\int\limits_{\Omega^\mathfrak{j}} \big|\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(g)\big|^{-1}\psi_G^2(g)\varphi(x.g)\big|\pi_{\mathfrak{g}(s),\mathfrak{j}}(g)\big|\,\mathrm{d}_{\beta_{\Omega^\mathfrak{j}}}(g)\Bigg\}\mathrm{d}_{G(s)/Z_G(\mathfrak{j})}\dot{x},$$
$$\varphi \in \mathscr{D}\big(\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}\big).$$

Grâce à la formule (6.22) appliquée avec $G(s)$ à la place de G et $Z_G(\mathfrak{j})$ à la place de $G(s)$ (voir aussi [21, Lemme 3.3]), il en résulte que la restriction à $\mathfrak{g}(s)^{*\mathfrak{j}}_{\mathrm{tr}}$ de $F^s_{\Omega,\mathfrak{j}}$ est la fonction généralisée $(2\pi)^{d_\mathfrak{g}}|\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{j}}|^{-1}\psi_G^2\,\mathrm{d}_{\beta_{\Omega^\mathfrak{j}}}/\mathrm{d}_{\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}}g$. Or cette dernière est clairement $N_G(\mathfrak{j})$-invariante.

Autrement dit, compte tenu de la formule (6.22), il résulte de (6.24) que l'on a

$$F_{\Omega|\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}} = F^s_{\Omega,\mathfrak{j}}. \quad (6.25)$$

Cela étant, désignons par γ l'application $(x,g) \mapsto x.g$ de $G \times \mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}$ sur $\mathfrak{g}^*_{r,\mathfrak{j}}$ et par pr la deuxième projection de $G \times \mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}$ sur $\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}})$ et α une densité à support compact sur $G \times \mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathfrak{j}}$ telle que $|\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}|\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g = \mathrm{pr}_*(\alpha)$ (voir le numéro 2.5). D'après [35] (voir aussi [22, Proposition 3.2.2]), on a alors

$$(2\pi)^{(d_\mathfrak{g}-d_{\mathfrak{g}(s)})}\int\limits_{\Omega^s_\mathfrak{j}} \varphi\psi_G^2\,\mathrm{d}\beta_{\Omega^s_\mathfrak{j}} = F^s_{\Omega,\mathfrak{j}}\big(|\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}|\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g\big) = F_\Omega\big(\gamma_*(\alpha)\big). \quad (6.26)$$

Il résulte de (6.26) et du Lemme 19 que l'application $\Omega \mapsto \int_{\Omega^s_\mathfrak{j}} \varphi\psi_G^2\,\mathrm{d}\beta_{\Omega^s_\mathfrak{j}}$ est borélienne. D'où la première assertion du lemme.

Maintenant, évaluons de deux manières différentes la restriction à $\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathrm{j}}$ de la fonction généralisée Φ sur $\mathfrak{g}^*_{r,\mathrm{j}}$, G-invariante, définie par

$$\Phi(\varphi\, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}^*} g) = \int\limits_{G\backslash \mathfrak{g}^*_{G,\chi,\mathrm{j}}} \left\{ \int\limits_{\Omega} \varphi(g) \psi_G^2(g)\, \mathrm{d}\beta_\Omega(g) \right\} \mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}(\Omega).$$

D'une part, par définition de la mesure $\mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}(\Omega)$ on a $\Phi = m_{G,\chi,\mathrm{j}}$. Or, par définition même, les fonctions généralisées $m_{G,\chi,\mathrm{j}}$ et $(m_{G(s),\chi,\mathrm{j}})|_{\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathrm{j}}}$ ont même restriction à $\mathfrak{g}_r^{*\mathrm{j}}$ qui les détermine entièrement. On en déduit immédiatement que

$$\Phi|_{\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathrm{j}}} = (m_{G(s),\chi,\mathrm{j}})|_{\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathrm{j}}}. \tag{6.27}$$

D'autre part, on a

$$\Phi = \int\limits_{G\backslash \mathfrak{g}^*_{G,\chi,\mathrm{j}}} F_\Omega \, \mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}$$

si bien que d'après la formule (6.25) et compte tenu de [22, Remarque 3.2.1], il vient pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathrm{j}})$,

$$\Phi|_{\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr},\mathrm{j}}}\big(\varphi\, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*} g\big) = (2\pi)^{(d_{\mathfrak{g}} - d_{\mathfrak{g}(s)})} \int\limits_{G\backslash \mathfrak{g}^*_{G,\chi,\mathrm{j}}} \left\{ \int\limits_{\Omega^s_{\mathrm{j}}} \varphi(g) \big|\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(g)\big|^{-1} \psi_G^2(g)\, \mathrm{d}\beta_{\Omega^s_{\mathrm{j}}}(g) \right\} \mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}. \tag{6.28}$$

Comparant les formules (6.27) et (6.28), on en déduit immédiatement la formule (6.21) comme voulu. □

Il résulte immédiatement du Lemme 20 le :

Corollaire 6.12.1. *Soit $s \in G_{\mathrm{ell},\mathrm{bp}}$. Pour $\mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}$-presque toute orbite $\Omega \in G \setminus \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$, la mesure $\psi_G^2\, \mathrm{d}\beta_{\Omega^s}$ est tempérée.*

Remarque 21. Soit $s \in G_{\mathrm{ell},\mathrm{bp}}$ et $\Omega \subset \mathfrak{g}_r^*$. La formule (6.25) exprime la restriction de la fonction généralisée $\psi_G^2\, \mathrm{d}\beta_\Omega / \mathrm{d}_{\mathfrak{g}^*} g$ à $\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr}}$ comme combinaison linéaire à coefficients rationnels positifs des fonctions généralisées $\psi_{G(s)}^2\, \mathrm{d}\beta_\omega / \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*} g$ où ω décrit $G(s) \setminus \Omega \cap \mathfrak{g}(s)^*$ et où la fonction $\psi_{G(s)}$ pour le groupe $G(s)$ est choisie telle que $|\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}|^{\frac{1}{2}} \psi_{G(s)}$ et ψ_G aient même restriction à $\mathfrak{g}(s)^*_{\mathrm{tr}}$.

Elle entraîne également le résultat suivant : si la mesure $\psi_G^2\, \mathrm{d}\beta_\Omega$ est tempérée, alors il en est de même de la mesure $|\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}|^2 \psi_{G(s)}^2\, \mathrm{d}\beta_{\Omega^s}$.

7. La formule de Poisson–Plancherel au voisinage d'un élément elliptique en bonne position

7.1. Dans [20], on a défini pour tout élément elliptique $T \in \mathfrak{g}$ une intégrale orbitale $M_{G,T}$ généralisant celles introduites par Harish-Chandra dans le cas réductif (voir [16]) et par Duflo dans le cas complexe (voir [8]). Soit donc T un élément elliptique de $\mathfrak{g}$. On pose $\mathfrak{g}_T = [T, \mathfrak{g}]$ de sorte que l'on a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(T) \oplus \mathfrak{g}_T$ qui permet d'identifier naturellement $\mathfrak{g}(T)^*$ au sous-espace de $\mathfrak{g}^*$ constitué des formes linéaires centralisées par T. On note $\mathfrak{u}_T^+$ la sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ somme des sous-espaces propres de $\operatorname{ad} T$ associés aux valeurs propres λ telles que $\mathrm{i}\lambda > 0$ et on pose $d_T = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{u}_T^+$. Alors, on a $(\mathfrak{g}_T)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{u}_T^+ \oplus \bar{\mathfrak{u}}_T^+$. On choisit une forme volume η_T sur $\mathfrak{g}_T$ telle que pour toute base $e_1, \dots, e_{d_T}$ de $\mathfrak{u}_T^+$ le nombre $\mathrm{i}^{d_T} \eta_T(e_1, \dots, e_{d_T}, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{d_T})$ soit strictement positif. On munit l'espace homogène $G/G(T)$ de la mesure $\mathrm{d}_{G/G(T)}\dot{x}$ tangente à $|\eta_T|$. On définit la fonction polynôme π_T sur $\mathfrak{g}(T)^*$ en décidant que, pour $g \in \mathfrak{g}(T)^*$, $\pi_T(g)$ est le pfaffien relativement à η_T de la restriction à $\mathfrak{g}_T$ de la forme alternée β_g. Vu comme un élément de l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}(T)$, π_T définit un opérateur différentiel à coefficients constants sur cet espace que l'on note ∂_{π_T}. On définit aussi une fonction polynôme ω_T sur $\mathfrak{g}(T)$ en posant $\omega_T(X) = \det_{\mathfrak{u}_T^+} \operatorname{ad} X$. Alors, l'intégrale orbitale $M_{G,T}$ est la distribution tempérée sur $\mathfrak{g}$ telle que

$$M_{G,T}(\varphi) = \left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^{d_T} \int\limits_{G/G(T)} \partial_{\pi_T}\big[\omega_T(X)\varphi(x.X)\big]_{X=T}\, \mathrm{d}_{G/G(T)}\dot{x}, \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{g}).$$

On remarquera que si T est centralisé par G, on a $M_{G,T} = \delta_T$.

On notera $\Theta_{G,T}$ la fonction généralisée sur $\mathfrak{g}^*$, transformée de Fourier de la distribution tempérée $M_{G,T}$.

7.2. Soit $s \in \widetilde{G}_{\mathrm{ell,bp}}$. On pose

$$E_{G,s,\Gamma} = \big\{T \in \mathfrak{g}(s)\colon\ s^{-1} \exp_{\widetilde{G}} T \in p_G^{-1}(\Gamma)\big\} = \big\{T \in \mathfrak{g}(s)\colon\ p_G(s^{-1}) \exp T \in \Gamma\big\}.$$

Alors $E_{G,s,\Gamma}$ est un sous-ensemble de $\mathfrak{g}(s)_{\mathrm{ell}}$ réunion dénombrable de $G(s)$-orbites. On définit une distribution $v_{G,\chi,s}$ sur $\mathfrak{g}(s)$ en posant, sous réserve de convergence de la série :

$$v_{G,\chi,s} = \sum_{T \in G(s)\backslash E_{G,s,\Gamma}} \breve{\chi}\big(s^{-1} \exp_{\widetilde{G}} T\big) M_{G(s),T}. \tag{7.1}$$

Le but de cette section est d'établir que la série $v_{G,\chi,s}$ converge dans l'espace des distributions tempérées sur $\mathfrak{g}(s)$ et d'en calculer la transformée de Fourier

$$\hat{v}_{G,\chi,s} = \sum_{T \in G(s)\backslash E_{G,s,\Gamma}} \breve{\chi}\big(s^{-1} \exp_{\widetilde{G}} T\big) \Theta_{G(s),T}.$$

7.3. Soit $\mathscr{V} \subset \mathfrak{g}^*$ un ouvert de Zariski comme dans les Lemmes 18 et 16(b).

Lemme 22. *Soit $s \in \widetilde{G}_{\mathrm{ell,bp}}$ et soit $\mathscr{V}_s$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}(s)^*_r$ qui sont u-équivalents dans $\mathfrak{g}^*$ à un élément de $\mathscr{V}$. Alors, $\mathscr{V}_s$ est un ouvert de Zariski $G(s)$-invariant de $\mathfrak{g}(s)^*$ ayant* *les propriétés* (b)(i) *et* (ii) *du Lemme* 16 *relativement à G et $G(s)$ ainsi que la propriété* (b)(iii) *relativement à $G(s)$.*

De plus, si $x \in G$, on a $\mathcal{V}_{xsx^{-1}} = \mathrm{Ad}^* x(\mathcal{V}_s)$.

Enfin, lorsque G est réductif, on a $\mathcal{V}_s = \mathfrak{g}(s)^*_r$.

Démonstration. Il est clair que $\mathcal{V}_s$ est $G(s)$-invariant. Soit $\mathfrak{j} \in \mathrm{car}(\mathfrak{g}(s))$ et $g \in \mathcal{V}^{\mathfrak{j}}$. Reprenant les notations du numéro 6.9, on écrit $g = \lambda + g_1$ avec $\lambda \in \mathfrak{j}^*$ et $g_1 \in (\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1})^*$. D'après le Lemme 16(a), g_1 est une forme de type unipotent u-équivalente à g et les éléments de $\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$ u-équivalents à g sont $N_G(\mathfrak{j})$-conjugués aux éléments de la forme $\mu + g_1$ avec $\mu \in \mathfrak{j}^*$, lesquels admettent $\mathfrak{b}_g$ comme sous-algèbre induisante canonique. On en déduit que $\mathcal{V}_s^{\mathfrak{j}} = p_{\mathfrak{j}}^{-1}(p_{\mathfrak{j}}(\mathcal{V}^{\mathfrak{j}})) \cap \mathfrak{g}(s)^*_r$, si bien que $\mathcal{V}_s^{\mathfrak{j}}$ est un ouvert de Zariski de $\mathfrak{g}(s)^{*\mathfrak{j}}_r$. Il en résulte que $\mathcal{V}_s$ est un ouvert de Zariski $G(s)$-invariant de $\mathfrak{g}(s)^*_r$.

Soit $g = \lambda + g_1 \in \mathcal{V}_s^{\mathfrak{j}}$, avec $\lambda \in \mathfrak{j}^*$ et $g_1 \in (\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1})^*$. Comme nous venons de le voir, g_1 est une forme de type unipotent u-équivalente à g admettant $\mathfrak{b}_g$ comme sous-algèbre induisante canonique. Utilisant la construction donnée dans le numéro 5.3 de ces sous-algèbres, on voit facilement que $\mathfrak{b}_g(s)$ est la sous-algèbre induisante canonique de g et g_1 relativement à $\mathfrak{g}(s)$ et que si $\mathfrak{r}_g$ est un facteur réductif de $\mathfrak{b}_g$ contenant $\mathfrak{j}$, alors $\mathfrak{r}_g(s)$ est un facteur réductif de $\mathfrak{b}_g(s)$ contenant $\mathfrak{j}$. Par ailleurs, on a $Z_G(\mathfrak{j}) = Z_{G(s)}(\mathfrak{j})$. Il résulte facilement de ces considérations que $\mathcal{V}_s$ vérifie les propriétés (b)(i) et (ii) du Lemme 16 relativement à G et $G(s)$.

Soit $g_1 \in p_{\mathfrak{j}}(\mathcal{V}_s^{\mathfrak{j}})$. D'après [20, 1, Lemme 28], si $\mu \in \mathfrak{j}^*$, on a $\mathfrak{g}(\mu + g_1) = \mathfrak{r}_g(\mu) \oplus {}^u(\mathfrak{g}(g))$. Il en résulte que $\mu + g_1$ est dans $\mathfrak{g}(s)^*_r$ si et seulement si $\pi_{G(s),\mathfrak{j},\mathfrak{s}}(\mu) \neq 0$. On voit donc que $\mathcal{V}_s$ vérifie aussi la propriété (b)(iii) relativement à $G(s)$.

Le fait que $\mathcal{V}_{xsx^{-1}} = \mathrm{Ad}^* x(\mathcal{V}_s)$, $x \in G$ résulte de l'invariance de l'ouvert $\mathcal{V}$.

La dernière assertion résulte de ce que, lorsque G est réductif, on a pris $\mathcal{V} = \mathfrak{g}^*_r$. □

Appliquant l'assertion (d) du Lemme 16 au groupe $G(s)^{\tilde{}s}$, à l'ouvert $\mathcal{V}_s$ et à la mesure $\mathrm{d}m_{G(s)^{\tilde{}s},\chi_s} = \mathrm{d}m_{G(s),\chi}$ (voir le numéro 6.7), on voit que $\mathcal{V}_s \cap \mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$ est de complémentaire $\mathrm{d}m_{G(s),\chi}$-négligeable dans $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$.

Par ailleurs, il est clair par définition de la mesure $\mathrm{d}m_{G(s),\chi}$ que deux fonctions continues sur un ouvert de $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$ sont égales dès qu'elles le sont $\mathrm{d}m_{G(s),\chi}$-presque partout.

7.4. On se donne $s \in \widetilde{G}_{\mathrm{ell,bp}}$ et on reprend les notations du numéro précédent ainsi que celles des Section 5 et numéro 4.6. Soit $g \in \mathcal{V}_s$ vu comme un élément de $\mathfrak{g}^*$, $B_g \subset G$ le sous-groupe induisant canonique associé, $\mathfrak{b}_g$ son algèbre de Lie, u la restriction de g au radical unipotent ${}^u\mathfrak{b}_g$ de $\mathfrak{b}_g$, R_g un facteur réductif de B_g fixant u, $\mathfrak{r}_g$ son algèbre de Lie, $\boldsymbol{R}_g$ l'adhérence de Zariski de $j(R_g)$ dans $\boldsymbol{G}$, $\widetilde{R}_g$ le revêtement universel de la composante neutre de R_g, $p_g : \widetilde{R}_g \to (R_g)_0$ la projection naturelle, $j_g = j \circ p_g$ et $\Gamma_g = p_g^{-1}(\Gamma \cap R_g)$. Alors, $(\widetilde{R}_g, j_g, (\boldsymbol{R}_g)_0)$ est un groupe réductif presque algébrique simplement connexe et Γ_g est un sous-groupe d'indice fini de $\ker j_g$.

Comme expliqué dans le numéro 3.4, l'action de R_g dans ${}^u\mathfrak{b}_g$ permet de définir l'extension métaplectique R_g^u de R_g ainsi que la fonction δ^u sur cette dernière. Soit $p_g^u : R_g^u \to R_g$ la projection canonique, $j_g^u = j \circ p_g^u$ et $\Gamma_g^u = (p_g^u)^{-1}(\Gamma \cap R_g)$. Alors $(R_g^u, j_g^u, \boldsymbol{R}_g)$ est un groupe réductif presque algébrique et Γ_g^u est un sous-groupe d'indice fini de $\ker j_g^u$. Comme $\widetilde{R}_g$ est simplement connexe, il existe un morphisme canonique $\nu_g : \widetilde{R}_g \to R_g^u$.

Comme $\delta^u|_{\Gamma_g^u}$ est un caractère, on définit un caractère χ_g^u de Γ_g^u en posant :

$$\chi_g^u(\gamma) = \chi \circ p_g^u(\gamma)\delta^u(\gamma), \quad \gamma \in \Gamma_g^u,$$

puis un caractère χ_g de Γ_g par la formule $\chi_g = \chi_g^u \circ \nu_g$. On remarquera que l'on a :

$$\chi_g(\gamma) = \chi \circ p_g(\gamma)\delta^u\big(\nu_g(\gamma)\big), \quad \gamma \in \Gamma_g. \tag{7.2}$$

Comme $\widetilde{R}_g$ est simplement connexe, p_g se relève de manière unique en un morphisme $\tilde{p}_g$ de $\widetilde{R}_g$ dans le revêtement métalinéaire $\widetilde{G}$ de G et, de même, $\mathrm{Ad}\colon \widetilde{R}_g \to \mathrm{GL}(\mathfrak{r}_g)$ se relève en un unique morphisme $\widetilde{\mathrm{Ad}}\colon \widetilde{R}_g \to \mathrm{ML}(\mathfrak{r}_g)$. On peut donc, comme dans le numéro 6.3, voir $\breve{\chi}_g$ comme un caractère de Γ_g. On a alors le :

Lemme 23. *Pour tout $\gamma \in \Gamma_g$, on a*

$$\breve{\chi}_g(\gamma) = \breve{\chi} \circ \tilde{p}_g(\gamma). \tag{7.3}$$

Démonstration. Comme deux facteurs réductifs de B_g stabilisant u sont conjugués par un élément de ${}^uB_g(u)$, il suffit de démontrer le résultat pour l'un d'entre-eux. Posons $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_g$ et, reprenant les notations du Lemme 16(a), écrivons $g = \lambda + g_1$ avec $\lambda \in \mathfrak{j}^*$ et $g_1 \in (\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1})^*$. D'après ce lemme, g_1 est une forme de type unipotent u-équivalente à g admettant $\mathfrak{b}_g$ comme sous-algèbre induisante canonique, g et g_1 ont même restriction à ${}^u\mathfrak{b}_g$, $\mathfrak{g}(g_1)$ est contenu dans $\mathfrak{b}_g$, tout facteur réductif de $\mathfrak{g}(g_1)$ est un facteur réductif de $\mathfrak{b}_g$ et ${}^u(\mathfrak{g}(g_1)) = {}^u(\mathfrak{g}(g))$. On peut donc supposer que $\mathfrak{r}_g \subset \mathfrak{g}(g_1)$, si bien que β_{g_1} induit une dualité $\mathfrak{r}_g$-invariante entre $\mathfrak{g}/{}^u\mathfrak{b}_g$ et $\mathfrak{b}_g(u)/\mathfrak{g}(g_1)$ qui, d'après ce que l'on vient de voir, s'identifie à ${}^u\mathfrak{b}_g(u)/{}^u(\mathfrak{g}(g))$. Soit $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{r}_g$ un tore anisotrope maximal et $T \subset \widetilde{R}_g$ le sous-groupe analytique correspondant. Alors, Γ_g est contenu dans T et T stabilise g_1.

De plus, on peut choisir $\mathfrak{m} \subset {}^u\mathfrak{b}_g$ (respectivement $\mathfrak{p} \subset {}^u\mathfrak{b}_g(u)$, $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{b}_g$) un sous-espace $\mathfrak{r}_g$-invariant supplémentaire de ${}^u\mathfrak{b}_g(u)$ (respectivement ${}^u(\mathfrak{g}(g))$, ${}^u\mathfrak{b}_g$). Dans ces conditions, on a $\Delta(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}) = -\Delta(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}) = \Delta(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{q}_{\mathbb{C}})$, les sous-espaces poids $\mathfrak{p}_{\mathbb{C},\alpha}$ et $\mathfrak{q}_{\mathbb{C},-\alpha}$, $\alpha \in \Delta(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$, étant mis en dualité par β_{g_1}. On voit alors qu'étant donné un sous-ensemble de poids positifs $\Delta^+ \subset \Delta(\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$, on peut trouver $\ell \in \mathscr{L}(\mathfrak{t})$ tel que

$$\ell = \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} (\mathfrak{p}_{\mathbb{C},\alpha} \oplus \mathfrak{q}_{\mathbb{C},-\alpha})\right) \oplus (\ell \cap \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}) \oplus \big(\ell \cap (\mathfrak{r}_g)_{\mathbb{C}}\big),$$

$\ell \cap \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ étant un lagrangien positif pour $\beta_{u|\mathfrak{m}}$. Il est alors clair que $\delta^u \circ \nu_{g|T}$ est l'unique caractère de T de différentielle $\rho_\ell - \rho_{\ell \cap (\mathfrak{r}_g)_{\mathbb{C}}}$. Par suite, il résulte du Lemme 9 et des formules (6.1), (6.3) et (7.2) que, si $\gamma \in \Gamma_g$ et $X \in \mathfrak{t}$ sont tels que $\gamma = \exp X$, on a

$$\begin{aligned}
\breve{\chi} \circ \tilde{p}_g(\gamma) &= \chi \circ p_g(\gamma) \exp\langle \rho_\ell, X\rangle \\
&= \chi \circ p_g(\gamma) \exp\langle \rho_\ell - \rho_{\ell \cap (\mathfrak{r}_g)_{\mathbb{C}}}, X\rangle \exp\langle \rho_{\ell \cap (\mathfrak{r}_g)_{\mathbb{C}}}, X\rangle \\
&= \chi \circ p_g(\gamma)\delta^u\big(\nu_g(\gamma)\big)\zeta_{\ell \cap (\mathfrak{r}_g)_{\mathbb{C}}}(\gamma) = \breve{\chi}_g(\gamma). \quad \square
\end{aligned}$$

Soit $g \in \mathscr{V}_s$. On note J_g le sous-groupe de Cartan–Duflo de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{j}_g$. On désigne alors par R_g un facteur réductif de B_g choisi comme plus haut et contenant J_g. On désigne par $\widetilde{J}_g$ l'image inverse de J_g dans $\widetilde{R}_g$. Avec ces notations, on a le résultat suivant :

Théorème 7.4.1. (i) *Soit $s \in \widetilde{G}_{\mathrm{ell,bp}}$. Alors, la série de distributions $v_{G,\chi,s}$ converge faiblement dans l'espace des distributions tempérées sur $\mathfrak{g}(s)$. De plus, il existe une fonction $q_{G,\chi,s}$ sur*

$\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$, $\mathrm{d}m_{G(s),\chi}$*-mesurable, analytique et uniquement déterminée sur* $\mathscr{V}_s \cap \mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$, *telle que* $|q_{G,\chi,s}|\,\mathrm{d}m_{G(s),\chi}$ *soit une mesure de Radon tempérée et que*

$$\hat{v_{G,\chi,s}} = q_{G,\chi,s} m_{G(s),\chi}. \tag{7.4}$$

(ii) *Les fonctions* $q_{G,\chi,s}$ *vérifient, pour tout* $s \in \widetilde{G}_{\mathrm{ell,bp}}$ *et tout* $g \in \mathscr{V}_s$, *les relations suivantes* :

$$q_{G,\chi,xsx^{-1}}(x.g) = q_{G,\chi}(s,g), \quad x \in G, \tag{7.5}$$

$$q_{G,\chi,s\gamma,}(g) = \breve{\chi}\big(\gamma^{-1}\big) q_{G,\chi,s}(g), \quad \gamma \in p_G^{-1}(\Gamma). \tag{7.6}$$

(iii) *Soit* $(G', j', \boldsymbol{G}')$, *un deuxième groupe presque algébrique d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}'$, $a\colon (G, j, \boldsymbol{G}) \to (G', j', \boldsymbol{G}')$ *un isomorphisme de groupes presque algébriques et* $a\colon \widetilde{G} \to \widetilde{G}'$ *son relèvement canonique. On désigne encore par a la différentielle de a, qui est un isomorphisme d'algèbres de Lie de* $\mathfrak{g}$ *sur* $\mathfrak{g}'$, *ainsi que la transposée inverse de cette dernière, qui est un isomorphisme de* $\mathfrak{g}^*$ *sur* $\mathfrak{g}'^*$. *Soit* $\Gamma' = a(\Gamma)$ *et* χ' *le caractère de* Γ' *tel que* $\chi = \chi' \circ a$. *Alors,* $\mathscr{V}' = a(\mathscr{V})$ *est un ouvert de Zariski de* $\mathfrak{g}'^*$ *vérifiant les propriétés du Lemme* 18 *et de la partie* (b) *du Lemme* 16. *De plus,* $a(s) \in \widetilde{G}'_{\mathrm{ell,bp}}$, $\mathscr{V}'_{a(s)} = a(\mathscr{V}_s)$ *et on a*

$$q_{G',\chi',a(s)}\big(a(g)\big) = q_{G,\chi,s}(g). \tag{7.7}$$

(iv) *Soit* $s \in \widetilde{G}_{\mathrm{ell,bp}}$. *Si* $g \in \mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi} \cap \mathscr{V}_s$, $p_G(s)$ *est un élément de* J_g, $g|_{\mathfrak{r}_g}$ *appartient à* $\mathfrak{r}_g(s)^*_{r,\chi_g}$ *et on a*

$$q_{G,\chi,s}(g) = \begin{cases} 0, & si\ p_G(s) \notin (R_g)_0\Gamma, \\ \breve{\chi}(s^{-1}s_g) q_{\widetilde{R}_g,\chi_g,\tilde{s}_g}(g|_{\mathfrak{r}_g}), & sinon, \end{cases} \tag{7.8}$$

où $\tilde{s}_g \in \widetilde{J}_g$ *est tel que* $s_g = \tilde{p}_g(\tilde{s}_g)$ *appartienne à* $sp_G^{-1}(\Gamma)$.

Il résulte de la formule (7.6) et du Lemme 23 que le membre de droite de l'Éq. (7.8) est indépendant du choix, comme indiqué, de $\tilde{s}_g \in \widetilde{R}_g$.

D'autre part, si G satisfait aux hypothèses du numéro 4.7, par exemple, s'il est connexe et simplement connexe, il est contenu dans $\widetilde{G}$. Dans ces conditions, $\tilde{p}_g$ est à valeurs dans G et les fonctions $q_{G,\chi,s}$ vérifient la relation $q_{G,\chi,s\epsilon} = -q_{G,\chi,s}$, où ϵ est l'élément non trivial de $\ker p_G$. Il suffit alors de démontrer le théorème pour $s \in G_{\mathrm{ell,bp}}$ et $\gamma \in \Gamma$.

Enfin, les assertions (ii) et (iii) sont des conséquences faciles de l'assertion (i).

Démonstration de Théorème 7.4.1. Compte tenu des remarques que nous venons de faire, le théorème a été démontré dans [13] lorsque G est un groupe semi-simple, connexe et simplement connexe et Γ est le centre de G, de sorte que $\boldsymbol{G}$ est le groupe adjoint complexe de $\mathfrak{g}$. Dans les quatre numéros suivants, nous expliquons comment les résultats de cet article qui nous seront utiles s'étendent au cas où G est réductif, connexe et simplement connexe.

7.5. Soit donc $(G, j, \boldsymbol{G})$ un groupe réductif simplement connexe et soit $s \in G_{\mathrm{ell,bp}} = G_{\mathrm{ell}}$. Soit D (respectivement $\boldsymbol{D}$) le sous-groupe dérivé de G (respectivement $\boldsymbol{G}$) et Z (respectivement $\boldsymbol{Z}$) la composante neutre de son centre. Posons $j_{\mathrm{d}} = j|_D$ et $j_{\mathrm{z}} = j|_Z$. Alors $(D, j_{\mathrm{d}}, \boldsymbol{D})$ et $(Z, j_{\mathrm{z}}, \boldsymbol{Z})$ sont des sous-groupes presque algébriques de $(G, j, \boldsymbol{G})$, D est semi-simple, connexe et simplement connexe, Z est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{Z}$ est un tore défini sur $\mathbb{R}$ et G est le produit direct $D \times Z$. On désigne par $\mathfrak{d}$ (respectivement $\mathfrak{z}$) l'algèbre de Lie de D (respectivement Z).

On a donc $\mathfrak{g} = \mathfrak{d} \times \mathfrak{z}$ et $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{d}^* \times \mathfrak{z}^*$. De plus, $\exp : \mathfrak{z} \to Z$ est un isomorphisme permettant d'identifier ces deux groupes et de voir ainsi $\ker j_{\mathrm{z}}$ comme un sous-groupe discret de $\mathfrak{z}$.

Si T (respectivement g) est un élément de $\mathfrak{g}$ (respectivement $\mathfrak{g}^*$), on écrit $T = (T_{\mathrm{d}}, T_{\mathrm{z}})$ (respectivement $g = (g_{\mathrm{d}}, g_{\mathrm{z}})$), avec $T_{\mathrm{d}} \in \mathfrak{d}$ et $T_{\mathrm{z}} \in \mathfrak{z}$ (respectivement $g_{\mathrm{d}} \in \mathfrak{d}^*$ et $g_{\mathrm{z}} \in \mathfrak{z}^*$). De même, on écrit $s = (s_{\mathrm{d}}, s_{\mathrm{z}})$, avec $s_{\mathrm{d}} \in D$ et $s_{\mathrm{z}} \in Z$. On a alors $\mathfrak{g}(s) = \mathfrak{d}(s_{\mathrm{d}}) \times \mathfrak{z}$ et $\mathfrak{g}(s)^* = \mathfrak{d}(s_{\mathrm{d}})^* \times \mathfrak{z}^*$.

Dans ces conditions, pour tout élément elliptique T de $\mathfrak{g}(s)$, on a

$$M_{G(s),T} = M_{D(s_{\mathrm{d}}),T_{\mathrm{d}}} \otimes \delta_{T_{\mathrm{z}}}, \tag{7.9}$$

$$\Theta_{G(s),T}(g) = \Theta_{D(s_{\mathrm{d}}),T_{\mathrm{d}}}(g_{\mathrm{d}}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle g_z, T_z\rangle}, \quad g \in \mathfrak{g}(s)^*. \tag{7.10}$$

Soit $\mathfrak{e}$ une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{g}(s)$ et $W(G(s), \mathfrak{e})$ le groupe de Weyl de $\mathfrak{e}$ dans $G(s)$. Soit $T \in \mathfrak{g}(s)$ un élément elliptique. Le nombre $|W(G(s), \mathfrak{e}).T|$ ne dépend pas du choix de la sous-algèbre de Cartan fondamentale $\mathfrak{e}$ de $\mathfrak{g}(s)$ contenant T. On pose alors

$$\overline{M}_{G(s),T} = \left|W\big(G(s), \mathfrak{e}\big).T\right|^{-1} M_{G(s),T}$$

et on désigne par $\overline{\Theta}_{G(s),T}$ la transformée de Fourier de $\overline{M}_{G(s),T}$ qui est telle que

$$\overline{\Theta}_{G(s),T} = \left|W\big(G(s), \mathfrak{e}\big).T\right|^{-1} \Theta_{G(s),T}. \tag{7.11}$$

Étant donné $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g}(s))$, on pose $\mathfrak{j}_{\mathrm{d}} = \mathfrak{j} \cap \mathfrak{d}$. De plus, on écrit $\mathfrak{j} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$, où $\mathfrak{t}$ (respectivement $\mathfrak{a}$) est la partie anisotrope (respectivement déployée) de $\mathfrak{j}$ et on pose $\mathfrak{j}_{\mathbb{R}} = \mathrm{i}\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$. On désigne par $\Phi = \Phi(\mathfrak{j}, \mathfrak{g}(s))$ le système des racines réelles de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{g}(s)$ qui est aussi celui de $\mathfrak{j}_{\mathrm{d}}$ dans $\mathfrak{d}(s_{\mathrm{d}})$. Si $\Phi^+ \subset \Phi$ est un système de racines positives, on désigne par $C(\Phi^+)$ la chambre de Weyl correspondante dans $\mathfrak{a}^*$:

$$C\big(\Phi^+\big) = \big\{\mu \in \mathfrak{a}^*:\ \mu(H_\alpha) > 0,\ \forall \alpha \in \Phi^+\big\}.$$

Enfin, $\delta_{u,v}$ désigne le symbole de Kronecker des variables u et v.

Grâce à la formule (7.10), on déduit la proposition suivante de résultats dûs pour l'essentiel à Harish-Chandra et exposés dans [13, II, Section 4].

Proposition 7.5.1. *La fonction généralisée $\overline{\Theta}_{G(s),T}$ est une fonction localement intégrable et $G(s)$-invariante sur $\mathfrak{g}(s)^*$, analytique sur $\mathfrak{g}(s)^*_r$. De plus, pour* $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g}(s))$, *$\Phi^+ \subset \Phi(\mathfrak{j}, \mathfrak{g}(s))$ un système de racines positives et $g \in \mathfrak{j}^*$ tel que $g|_{\mathfrak{a}} \in C(\Phi^+)$, on a*

$$\overline{\Theta}_{G(s),T}(g) = \sum_{Y \in \mathrm{i}\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}} b_{G,s,T}\big(\mathfrak{j}, \Phi^+, Y\big) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle g, Y\rangle}, \tag{7.12}$$

où $b_{G,s,T}(\mathfrak{j}, \Phi^+, Y)$ est une fonction des trois variables $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g}(s))$, Φ^+ un système de racines positives dans $\Phi(\mathfrak{j}, \mathfrak{g}(s))$ et $Y \in \mathrm{i}\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$, ayant les propriétés suivantes :

(i) *la fonction $b_{G,s,T}$ est $G(s)$-invariante,*

(ii) *si* $b_{G,s,T}(\mathfrak{j},\Phi^+,Y)$ *est non nul, alors* $Y\in \boldsymbol{G}(s).T$,
(iii) *si on écrit* $Y\in \mathrm{i}\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$ *sous la forme* $Y=Y_0-\mathrm{i}\pi y$ *avec* $Y_0\in\mathfrak{t}$ *et* $y\in\mathfrak{a}$, *on a*

$$b_{G,s,T}\big(\mathfrak{j},\Phi^+,Y\big)=0,\quad si\ y\notin\sum_{\alpha\in\Phi^+}\mathbb{R}^+H_\alpha,$$

(iv) *on a*

$$b_{G,s,T}\big(\mathfrak{j},\Phi^+,Y\big)=b_{D,s_{\mathrm{d}},T_{\mathrm{d}}}\big(\mathfrak{j}_{\mathrm{d}},\Phi^+,Y_{\mathrm{d}}\big)\delta_{T_{\mathrm{z}},Y_{\mathrm{z}}}. \tag{7.13}$$

De plus, les fonctions $b_{G,s,T}$ *sont bornées sur leur domaine de définition, uniformément par rapport à* T.

On remarquera que la condition (ii) entraine que la somme dans (7.12) est finie.

7.6. On garde les notations du numéro précédent et on suppose dans ce numéro que $\boldsymbol{D}$ est le groupe adjoint complexe de $\mathfrak{d}$, que $\boldsymbol{G}$ est le produit direct $\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{Z}$ et que $\Gamma=\ker j$. On se donne χ un caractère de $\ker j$.

Pour simplifier, on pose $E_{G,s}=E_{G,s,\ker j}$. On choisit $S_{\mathrm{z}}\in\mathfrak{z}$ tel que $\exp S_{\mathrm{z}}=s_{\mathrm{z}}$. Alors, on a $j=j_{\mathrm{d}}\times j_{\mathrm{z}}$ et

$$E_{G,s}=E_{D,s_{\mathrm{d}},\ker j_{\mathrm{d}}}\times(S_{\mathrm{z}}+\ker j_{\mathrm{z}}).$$

Posant $\chi_{\mathrm{d}}=\chi|_{\ker j_{\mathrm{d}}}$ et $\chi_{\mathrm{z}}=\chi|_{\ker j_{\mathrm{z}}}$, il vient alors :

$$v_{G,\chi,s}=v_{D,\chi_{\mathrm{d}},s_{\mathrm{d}}}\otimes\bigg(\sum_{T\in\ker j_{\mathrm{z}}}\chi_{\mathrm{z}}(\exp T)\delta_{S_{\mathrm{z}}+T}\bigg). \tag{7.14}$$

De plus, l'ensemble $\mathfrak{z}^*_{Z,\chi_{\mathrm{z}}}$ est défini, de même que la fonction généralisée $m_{Z,\chi_{\mathrm{z}}}$, et l'on a

$$\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}=\mathfrak{d}(s_{\mathrm{d}})^*_{r,\chi_{\mathrm{d}}}\times\mathfrak{z}^*_{Z,\chi_{\mathrm{z}}},\qquad \mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi}=\mathfrak{d}(s_{\mathrm{d}})^*_{D,\chi_{\mathrm{d}}}\times\mathfrak{z}^*_{Z,\chi_{\mathrm{z}}},\qquad m_{G(s),\chi}=m_{D(s_{\mathrm{d}}),\chi_{\mathrm{d}}}\otimes m_{Z,\chi_{\mathrm{z}}}.$$

Par suite, si $g\in\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$, on a $g_{\mathrm{d}}\in\mathfrak{d}(s_{\mathrm{d}})^*_{r,\chi_{\mathrm{d}}}$ et $g_{\mathrm{z}}\in\mathfrak{z}^*_{Z,\chi_{\mathrm{z}}}$. Alors, utilisant le fait que le théorème est vrai pour D et prenant la transformée de Fourier de l'égalité (7.14), on déduit que le théorème est vrai pour G avec

$$q_{G,\chi,s}(g)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle g_{\mathrm{z}},S_{\mathrm{z}}\rangle}q_{D,\chi_{\mathrm{d}},s_{\mathrm{d}}}(g_{\mathrm{d}}),\quad g\in\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}. \tag{7.15}$$

Nous appuyant sur les résultats de [13], nous allons donner une description de la fonction $q_{G,\chi,s}$.

Soit $\mathfrak{j}\in\mathrm{car}(\mathfrak{g}(s))$ et $\Phi^+\subset\Phi(\mathfrak{j},\mathfrak{g}(s))$ un système de racines positives. On pose

$$\begin{aligned}
\mathfrak{j}_s&=\big\{X\in\mathrm{i}\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}\colon\ \exp_{\boldsymbol{G}}X=j(s)\big\},\\
\mathfrak{a}_s\big(\Phi^+\big)&=\bigg\{x\in\sum_{\alpha\in\Phi^+}\mathbb{N}H_\alpha\mid(-\mathrm{i}\pi x+\mathfrak{t})\cap\mathfrak{j}_s\neq\emptyset\bigg\},\\
\mathfrak{t}_1&=\mathfrak{t}\cap\mathfrak{j}_1.
\end{aligned}$$

Compte tenu de (7.10) et de la Proposition 7.5.1(iii), le résultat suivant se démontre comme le Lemme 4 de [13, II, Section 5].

Lemme 24. *Soit $T \in E_{G,s}$, $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g}(s))$, $\Phi^+ \subset \Phi(\mathfrak{j}, \mathfrak{g}(s))$ un système de racines positives et $X \in i\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$ tel que $b_{G,s,T}(\mathfrak{j}, \Phi^+, X) \neq 0$. Alors*

(i) $X \in \mathfrak{j}_s$,
(ii) *si on écrit $X = X_0 - i\pi x$ avec $X_0 \in \mathfrak{t}$ et $x \in \mathfrak{a}$, on a $x \in \mathfrak{a}_s(\Phi^+)$.*

Maintenant, on introduit la fonction $b_{G,\chi,s}$ en posant

$$b_{G,\chi,s}\big(\mathfrak{j}, \Phi^+, Y\big) = \sum_{T \in \mathfrak{e} \cap E_{G,s}} \check{\chi}\big(s^{-1} \exp T\big) b_{G,s,T}\big(\mathfrak{j}, \Phi^+, Y\big), \tag{7.16}$$

où $\mathfrak{e}$ est une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{g}(s)$. Il est clair que la somme dans (7.16) est finie pour $\mathfrak{j}$, Φ^+ et Y fixés et qu'elle ne dépend pas du choix de la sous-algèbre de Cartan fondamentale $\mathfrak{e}$. Les résultats du lemme suivant sont conséquence de ceux de [13, II, Section 5, Lemmes 4–6], de la Proposition 7.5.1(iii) et de la formule (7.13).

Lemme 25. (i) *Soit $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g}(s))$, $\Phi^+ \subset \Phi(\mathfrak{j}, \mathfrak{g}(s))$ un système de racines positives et $X \in i\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$. Si $b_{G,\chi,s}(\mathfrak{j}, \Phi^+, X) \neq 0$, alors*

(a) $X \in \mathfrak{j}_s$,
(b) *si on écrit $X = X_0 - i\pi x$ avec $X_0 \in \mathfrak{t}$ et $x \in \mathfrak{a}$, on a $x \in \mathfrak{a}_s(\Phi^+)$.*

De plus, pour tout $Y \in \mathfrak{t}_1$, on a

$$b_{G,\chi,s}\big(\mathfrak{j}, \Phi^+, X + Y\big) = \check{\chi}(\exp Y) b_{G,\chi,s}\big(\mathfrak{j}, \Phi^+, X\big). \tag{7.17}$$

(ii) *Il existe un réel $d > 0$ tel que $|b_{G,\chi,s}(\mathfrak{j}, \Phi^+, X)| \leqslant d$, pour tout $(\mathfrak{j}, \Phi^+, X)$.*

Maintenant, pour $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g}(s))$, on pose $\mathfrak{t}_\chi^* = \mathfrak{t}^*_{\ker j,\chi}$ (voir le numéro 6.2). Alors, il résulte de la relation (7.17) que, le nombre $b_{G,\chi,s}(\mathfrak{j}, \Phi^+, X)e^{-i\langle \mu, X_0\rangle}$, où $X = X_0 - i\pi x \in \mathfrak{j}_s$ avec $X_0 \in \mathfrak{t}$, $x \in \mathfrak{a}$ et $\mu \in \mathfrak{t}_\chi^*$, ne dépend que de x. On peut donc définir la fonction $c_{G,\chi,s}(\mathfrak{j}, \Phi^+, \mu, x)$ des quatre variables $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g}(s))$, Φ^+ un système de racines positives dans $\Phi(\mathfrak{j}, \mathfrak{g}(s))$, $\mu \in \mathfrak{t}_\chi^*$ et $x \in \mathfrak{a}$ en posant :

$$c_{G,\chi,s}\big(\mathfrak{j}, \Phi^+, \mu, x\big) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathfrak{a}_s, \\ b_{G,\chi,s}(\mathfrak{j}, \Phi^+, X_0 - i\pi x)e^{-i\langle \mu, X_0\rangle}, & \text{si } x \in \mathfrak{a}_s, \end{cases} \tag{7.18}$$

où $X_0 \in \mathfrak{t}$ est tel que $X_0 - i\pi x \in \mathfrak{j}_s$.

Alors, la proposition suivante, qui décrit la fonction $q_{G,\chi,s}$, est conséquence de [13, II, Section 5, Lemme 7, Théorème 1′] et de la relation (7.15).

Proposition 7.6.1. (i) *Soit* $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g}(s))$ *et* $\Phi^+ \subset \Phi(\mathfrak{j}, \mathfrak{g}(s))$ *un système de racines positives. Avec les notations du Lemme* 25, *on a pour* $\nu \in C(\Phi^+)$ *et* $\mu \in \mathfrak{t}_\chi^*$,

$$\sum_{x \in \mathfrak{a}_s} \left|c_{G,\chi,s}\bigl(\mathfrak{j}, \Phi^+, \mu, x\bigr)\right| \mathrm{e}^{-\pi\langle \nu, x\rangle} \leqslant \mathrm{d} \prod_{\alpha \in \Phi^+,\, \alpha \text{ simple}} \bigl(1 - \mathrm{e}^{-\pi\langle \nu, H_\alpha\rangle}\bigr). \tag{7.19}$$

(ii) *Si* $\lambda \in \mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$, $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g}(s))$, $\Phi^+ \subset \Phi(\mathfrak{j}, \mathfrak{g}(s))$ *sont tels que* $\lambda \in \mathfrak{j}^*$, $\nu = \lambda|_{\mathfrak{a}} \in C(\Phi^+)$ *et si* $\mu = \lambda|_{\mathfrak{t}}$, *on a*

$$q_{G,\chi,s}(\lambda) = \sum_{x \in \mathfrak{a}_s} c_{G,\chi,s}\bigl(\mathfrak{j}, \Phi^+, \mu, x\bigr)\mathrm{e}^{-\pi\langle \nu, x\rangle}. \tag{7.20}$$

7.7. Dans ce numéro, on établit un résultat général permettant notamment de ramener le cas d'un groupe reductif connexe simplement connexe quelconque à celui que nous venons de traiter. On suppose donc que $(G, j, \boldsymbol{G})$ est un groupe presque algébrique, sans plus. Si $\Gamma \subset \ker j$ est un sous-groupe d'indice fini, $\chi \in \Gamma\hat{}$, $s \in \widetilde{G}_{\mathrm{ell,bp}}$ et $g \in \mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$, on définit le caractère η_g de $\Gamma \cap (J_g)_0$ en posant pour $T \in \mathfrak{j}_g$ tel que $\exp T \in \Gamma$,

$$\eta_g(\exp T) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle g, T\rangle} \zeta_{\widetilde{G}}(\exp_{\widetilde{G}} T). \tag{7.21}$$

Avec ces notations, on a le résultat suivant :

Lemme 26. *Si le Théorème* 7.4.1 *est vrai pour le sous-groupe* Γ *de* $\ker j$, *il est vrai pour tout sous-groupe d'indice fini* Γ' *de* Γ. *Plus précisément, si* χ' *est un caractère de* Γ', *pour tout* $g \in \mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi'} \cap \mathscr{V}_s$, *on a*

$$q_{G,\chi',s}(g) = \bigl[\Gamma \cap (J_g)_0 : \Gamma' \cap (J_g)_0\bigr]\bigl[\Gamma : \Gamma'\bigr]^{-1} \sum_{\substack{\chi \in \Gamma\hat{},\ \chi|_{\Gamma'} = \chi' \\ \chi|_{\Gamma \cap (J_g)_0} = \eta_g}} q_{G,\chi,s}(g). \tag{7.22}$$

Démonstration. Soit χ' un caractère de Γ'. Alors, utilisant la Définition (7.1) de la distribution $v_{G,\chi',s}$ et la formule (6.9) on a

$$v_{G,\chi',s} = \bigl[\Gamma : \Gamma'\bigr]^{-1} \sum_{\substack{\chi \in \Gamma\hat{} \\ \chi|_{\Gamma'} = \chi'}} v_{G,\chi,s}.$$

Prenant la transformée de Fourier, on en déduit que

$$q_{G,\chi',s} m_{G(s),\chi'} = [\Gamma : \Gamma']^{-1} \sum_{\substack{\chi \in \Gamma\hat{} \\ \chi|_{\Gamma'} = \chi'}} q_{G,\chi,s} m_{G(s),\chi}.$$

Soit $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g}(s))$ et plaçons-nous sur l'ouvert $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi',\mathfrak{j}}$ de $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi'}$. Alors, compte tenu de la formule (6.8) du Lemme 14, la relation précédente s'écrit

$$q_{G,\chi',s}\Biggl(\sum_{\substack{\chi\in\Gamma\hat{}/((\Gamma\cap J_0)\Gamma')^{\perp}\\ \chi|_{\Gamma'}=\chi'}} m_{G(s),\chi,\mathfrak{j}}\Biggr)$$
$$=[\Gamma\cap J_0:\Gamma'\cap J_0][\Gamma:\Gamma']^{-1}\sum_{\substack{\chi\in\Gamma\hat{}/((\Gamma\cap J_0)\Gamma')^{\perp}\\ \chi|_{\Gamma'}=\chi'}}\Biggl(\sum_{\eta\in((\Gamma\cap J_0)\Gamma')^{\perp}} q_{G,\chi\eta,s}\Biggr)m_{G(s),\chi,\mathfrak{j}}.$$

Soit $g\in\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi'}$. Alors, si χ est un caractère de Γ, g est dans $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$ si et seulement si $\chi|_{\Gamma\cap(J_g)_0}=\eta_g$. La formule (7.22) du lemme est alors conséquence de la formule précédente et du Lemme 14. Les autres assertions du lemme s'en déduisent. □

7.8. Supposons maintenant que $(G,j,\boldsymbol{G})$ est un groupe presque algébrique réductif connexe simplement connexe quelconque et reprenons les notations du numéro 7.5. Soit $\overline{\boldsymbol{D}}$ le groupe adjoint de $\boldsymbol{D}$, $\overline{\boldsymbol{Z}}$ le tore algébrique défini sur $\mathbb{R}$ quotient de $\boldsymbol{Z}$ par le groupe fini $\boldsymbol{Z}\cap\boldsymbol{D}$, $q:\boldsymbol{Z}\to\overline{\boldsymbol{Z}}$ la projection canonique, $\overline{\boldsymbol{G}}=\overline{\boldsymbol{D}}\times\overline{\boldsymbol{Z}}$, $p:\boldsymbol{G}\to\overline{\boldsymbol{G}}$ l'isogénie telle que $p(xz)=(\mathrm{Ad}\,x,q(z))$, $x\in\boldsymbol{D}$, $z\in\boldsymbol{Z}$, et $\bar{j}=p\circ j$. Alors $(G,\bar{j},\overline{\boldsymbol{G}})$ est un groupe presque algébrique comme dans le numéro 7.6 et $\ker j$ est un sous-groupe d'indice fini de $\ker\bar{j}$. Avec ces notations, et compte tenu du Lemme 26, on a le résultat suivant :

Lemme 27. *Le Théorème* 7.4.1 *est vrai pour tout groupe presque algébrique réductif connexe simplement connexe* $(G,j,\boldsymbol{G})$. *Plus précisément, si* $s\in G_{\mathrm{ell}}$, $\Gamma\subset\ker j$ *est un sous-groupe d'indice fini et* χ *est un caractère de* Γ, *pour tout* $g\in\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$, *on a*

$$q_{G,\chi,s}(g)=\bigl[\ker\bar{j}\cap(J_g)_0:\Gamma\cap(J_g)_0\bigr][\ker\bar{j}:\Gamma]^{-1}\sum_{\substack{\chi'|_{\ker\bar{j}\cap(J_g)_0}=\eta_g\\ \chi'\in(\ker\bar{j})\hat{},\,\chi'|_{\Gamma}=\chi}} q_{G,\chi',s}(g). \tag{7.23}$$

7.9. Revenons à la preuve du Théorème 7.4.1 dans le cas général, dont nous avons dit qu'il suffit de montrer les assertions (i) et (iv). Soit $T\in E_{G,s,\Gamma}$. Il résulte de [20, Théorème 14] que $\Theta_{G(s),T}$ est une fonction localement intégrable, analytique sur l'ouvert $\mathcal{V}_s$ du Lemme 22, de complémentaire Lebesgue-négligeable, et qui vérifie

$$\Theta_{G(s),T}(g)=\sum_{T'\in R_{g,s}\backslash G(s).T\cap\mathfrak{r}_{g,s}}\Theta_{R_{g,s},T'}(g|_{\mathfrak{r}_{g,s}}),$$

où, pour $g\in\mathcal{V}_s$, $R_{g,s}$ est un facteur réductif du sous-groupe induisant canonique $B_{g,s}$ de g relativement à $G(s)$, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{r}_{g,s}$ contient la sous-algèbre de Cartan–Duflo $\mathfrak{j}_{g,s}$ de $\mathfrak{g}(s)$ relative à g. Encore une fois, bien que le résultat soit énoncé dans [20], avec pour B_g le sous-groupe acceptable canonique associé à g, il est immédiat, dans la mesure où le second est inclus dans le premier et a même algèbre de Lie, qu'il reste vrai si B_g est le sous-groupe induisant canonique.

Cela dit, comme on l'a vu dans la démonstration du Lemme 22, $\mathfrak{b}_g(s)$ est l'algèbre de Lie de $B_{g,s}$, de sorte que l'on peut choisir le facteur réductif R_g de B_g tel que $(R_g(s))_0\subset R_{g,s}\subset R_g(s)$ et, si $\mathfrak{r}_g$ est l'algèbre de Lie de R_g, $\mathfrak{r}_{g,s}=\mathfrak{r}_g(s)$. Comme dans le numéro 7.4 on considère le groupe presque algébrique réductif simplement connexe $(\widetilde{R}_g,j_g,(\boldsymbol{R}_g)_0)$, revêtement universel de la composante neutre de R_g. Enfin, reprenant les notations du numéro 6.10, pour $\mathrm{j} \in \operatorname{car} \mathfrak{g}(s)$ et $\mathscr{W} \in [\mathscr{V}_s^{\mathrm{j}}]$, on choisit $g_{\mathscr{W}} \in \mathscr{W}$. Alors, si $g \in \mathscr{W}$, on a (voir la démonstration de la Proposition 3.13 de [20]) :

$$\Theta_{G(s),T}(g) = \sum_{T' \in R_{g_{\mathscr{W}},s} \backslash G(s).T \cap \mathfrak{r}_{g_{\mathscr{W}},s}} \Theta_{R_{g_{\mathscr{W}},s},T'}(g|_{\mathfrak{r}_{g_{\mathscr{W}},s}}).$$

On peut de plus choisir $R_{g_{\mathscr{W}}}$ stabilisant la restriction $u_{\mathscr{W}}$ de $g_{\mathscr{W}}$ à ${}^u\mathfrak{b}_{g_{\mathscr{W}}}$. Il vient alors

$$\Theta_{G(s),T}(g) = \sum_{T' \in \widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}(s) \backslash G(s).T \cap \mathfrak{r}_{g_{\mathscr{W}}}(s)} \Theta_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}(s),T'}(g|_{\mathfrak{r}_{g_{\mathscr{W}}}(s)}), \quad g \in \mathscr{W}. \tag{7.24}$$

Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{g}(s)^*)$. Alors, compte tenu de (7.24), (7.1) et (6.17), on a

$$\hat{v_{G,\chi,s}}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g) = (2\pi)^{-2d_{\mathfrak{g}}} \sum_{\mathrm{j} \in \operatorname{Car}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s))} \big[W\big(G(s),\mathrm{j}\big)\big]^{-1} \sum_{\mathscr{W} \in [\mathscr{V}_s^{\mathrm{j}}]} A_{\mathrm{j}}^{\mathscr{W}}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g), \tag{7.25}$$

où on a posé, pour $\mathrm{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g}(s))$ et $\mathscr{W} \in [\mathscr{V}_s^{\mathrm{j}}]$, sous réserve de convergence des séries,

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{j}}^{\mathscr{W}}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g) = \sum_{T \in G(s) \backslash E_{G,s,\Gamma}} \breve{\chi}\big(s^{-1}\exp_{\widetilde{G}} T\big) \sum_{T' \in \widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}(s) \backslash G(s).T \cap \mathfrak{r}_{g_{\mathscr{W}}}(s)} \int_{\mathrm{j}^*} F_{G(s),\mathrm{j},\varphi}^{\mathscr{W}}(\lambda) \\ \times \Theta_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}(s),T'}(\lambda)\pi_{G(s),\mathrm{j},\mathbf{s}}(\lambda)\,\mathrm{d}_{\mathrm{j}^*}\lambda. \end{aligned} \tag{7.26}$$

Fixons donc $\mathrm{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g}(s))$ et $\mathscr{W} \in [\mathscr{V}_s^{\mathrm{j}}]$. Il est clair que la fonction généralisée $A_{\mathrm{j}}^{\mathscr{W}}$ est non nulle seulement si $p_G(s) \in (R_{g_{\mathscr{W}}})_0\Gamma$. Supposons que ce soit le cas et choisissons $\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}} \in \widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}$ tel que $s_{g_{\mathscr{W}}} = \tilde{p}_{g_{\mathscr{W}}}(\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}) \in s\,p_G^{-1}(\Gamma)$. On a alors

$$\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}(s) = \widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}(s_{g_{\mathscr{W}}}),$$
$$E_{G,s,\Gamma} \cap \mathfrak{r}_{g_{\mathscr{W}}}(s) = E_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}},\Gamma_{g_{\mathscr{W}}}}$$

et, compte tenu du Lemme 23, formule (7.3),

$$\breve{\chi}\big(s^{-1}\exp_{\widetilde{G}} T\big) = \breve{\chi}\big(s^{-1}s_{g_{\mathscr{W}}}\big)\breve{\chi}_{g_W}\big(\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}^{-1}\exp_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}} T\big), \quad T \in E_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}},\Gamma_{g_{\mathscr{W}}}}.$$

Reportons ceci dans la formule (7.26). Alors, comme $\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}(\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}})$ est un sous-groupe de $\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}(s_{g_{\mathscr{W}}})$ de même algèbre de Lie (en fait connexe et d'indice fini) si bien que l'on a

$$\Theta_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}(s_{g_{\mathscr{W}}}),T} = \sum_{T' \in \widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}(\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}) \backslash \widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}(s_{g_{\mathscr{W}}}).T} \Theta_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}(\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}),T'},$$

on obtient, toujours sous réserve de convergence des séries,

$$A_{\mathrm{j}}^{\mathscr{W}}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g)=\breve{\chi}\big(s^{-1}s_{g_{\mathscr{W}}}\big)\sum_{T\in\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}(\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}})\backslash E_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}},\Gamma_{g_{\mathscr{W}}}}}\breve{\chi}_{gW}\big(\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}^{-1}\exp_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}}T\big)$$
$$\times\int_{\mathrm{j}^*}F_{G(s),\mathrm{j},\varphi}^{\mathscr{W}}(\lambda)\Theta_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}(\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}),T}(\lambda)\pi_{G(s),\mathrm{j},\mathbf{s}}(\lambda)\,\mathrm{d}_{\mathrm{j}^*}\lambda. \tag{7.27}$$

Soit $\mathfrak{e}_{g_{\mathscr{W}}}$ une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{r}_{g_{\mathscr{W}}}$. Avec les notations du numéro 7.8, on considère le groupe presque algébrique réductif simplement connexe $(\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},\bar{j}_{g_{\mathscr{W}}},\overline{(\boldsymbol{R}_{g_{\mathscr{W}}})_0})$. Avec ces notations et celles des numéros 7.4 et 7.8, on a

$$A_{\mathrm{j}}^{\mathscr{W}}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g)=\breve{\chi}\big(s^{-1}s_{g_{\mathscr{W}}}\big)[\ker\bar{j}_{g_{\mathscr{W}}}:\Gamma_{g_{\mathscr{W}}}]^{-1}\sum_{\substack{(\chi'\in\ker\bar{j}_{g_{\mathscr{W}}})\hat{}\\ \chi'|_{\Gamma_{g_{\mathscr{W}}}}=\chi_{g_{\mathscr{W}}}}}A_{\mathrm{j},\chi'}^{\mathscr{W}}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g) \tag{7.28}$$

où on a posé, sous réserve de convergence des séries,

$$A_{\mathrm{j},\chi'}^{\mathscr{W}}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g)=\sum_{T\in\mathfrak{e}_{g_{\mathscr{W}}}\cap E_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}}\breve{\chi}'\big(\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}^{-1}\exp_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}}T\big)$$
$$\times\int_{\mathrm{j}^*}F_{G(s),\mathrm{j},\varphi}^{\mathscr{W}}(\lambda)\overline{\Theta}_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}(\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}),T}(\lambda)\pi_{G(s),\mathrm{j},\mathbf{s}}(\lambda)\,\mathrm{d}_{\mathrm{j}^*}\lambda. \tag{7.29}$$

Maintenant, soit $\mathrm{j}=\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{a}$ la décomposition de j en partie anisotrope et partie déployée, Φ (respectivement Φ_I) le système des racines réelles (respectivement imaginaires) de $\mathrm{j}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{r}_{g_{\mathscr{W}},\mathbb{C}}(\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}})$, $W(\Phi)$ le groupe de Weyl de Φ et Φ^+ un système de racines positives dans Φ. On choisit des mesures de Lebesgue $\mathrm{d}_{\mathfrak{t}^*}\mu$ et $\mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*}\nu$ telles que $\mathrm{d}_{\mathrm{j}^*}\lambda=\mathrm{d}_{\mathfrak{t}^*}\nu\,\mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*}\mu$. On pose

$$\pi_{G(s),\Phi^+}=\prod_{\alpha\in\Phi^+}H_\alpha$$

et on désigne par $\pi'_{G(s),\mathrm{j},\mathbf{s}}$ le quotient de $\pi_{G(s),\mathrm{j},\mathbf{s}}$ par $\pi_{G(s),\Phi^+}$. Étant donnés $w\in W(\Phi)$ et Φ_I^+ un système de racines positives dans Φ_I, on pose

$$\Psi_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(\mu,\nu)=\mathbb{1}_{C(\Phi_I^+)}(\mu)F_{G(s),\mathrm{j},\varphi}^{\mathscr{W}}(\mu+w.\nu)\pi'_{G(s),\mathrm{j},\mathbf{s}}(\mu+w.\nu),\quad \mu\in\mathfrak{t}^*,\ \nu\in\mathfrak{a}^*, \tag{7.30}$$

$C(\Phi_I^+)$ étant la chambre de Weyl positive définie par Φ_I^+ dans $\mathfrak{t}^*$, et pour $\chi'\in(\ker\bar{j}_{g_{\mathscr{W}}})\hat{}$,

$$A_{\mathrm{j},\chi'}^{\mathscr{W},\Phi_I^+,w}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g)=\sum_{T\in\mathfrak{e}_{g_{\mathscr{W}}}\cap E_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}}\breve{\chi}'\big(\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}^{-1}\exp_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}}T\big)\int_{\mathfrak{t}^*\times C(\Phi^+)}\Psi_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(\mu,\nu)$$
$$\times\overline{\Theta}_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}(\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}),T}(\mu+\nu)\pi_{G(s),\Phi^+}(w.\nu)\,\mathrm{d}_{\mathfrak{t}^*}\mu\,\mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*}\nu, \tag{7.31}$$

sous réserve de convergence des séries. Alors, comme les restrictions à $\mathfrak{j}^*$ des fonctions $\overline{\Theta}_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}(\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}),T}$ sont $W(\Phi)$-invariantes, on a pour $\chi' \in (\ker \bar{j}_{g_{\mathscr{W}}})\hat{}$,

$$A^{\mathscr{W}}_{\mathrm{j},\chi'}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g) = \sum_{\Phi_I^+}\sum_{w\in W(\Phi)} A^{\mathscr{W},\Phi_I^+,w}_{\mathrm{j},\chi'}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g), \tag{7.32}$$

la première sommation portant sur les systèmes de racines positives dans Φ_I.

7.10. Dans ce numéro, nous allons étudier les expressions $A^{\mathscr{W},\Phi_I^+,w}_{\mathrm{j},\chi'}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g)$, j, $\mathscr{W}$, χ', w et Φ_I^+ étant fixés. Pour $T \in \mathfrak{e}_{g_{\mathscr{W}}} \cap E_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}$, on désigne par $A_T(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g)$ le terme d'indice T dans la série (7.31), de sorte que l'on a, sous réserve de convergence,

$$A^{\mathscr{W},\Phi_I^+,w}_{\mathrm{j},\chi'}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g) = \sum_{T\in\mathfrak{e}_{g_{\mathscr{W}}}\cap E_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}} A_T(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g). \tag{7.33}$$

Compte tenu de la Proposition 7.5.1, on a

$$\begin{aligned} A_T(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g) &= \breve{\chi}'\big(\tilde{s}^{-1}_{g_{\mathscr{W}}}\exp_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}} T\big)\sum_{Y\in\mathrm{ij}_{\mathbb{R}}} b_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}},T}\big(\mathrm{j},\Phi^+,Y\big) \\ &\quad\times \int_{\mathfrak{t}^*\times C(\Phi^+)} \Psi^{\Phi_I^+,w}_{\mathscr{W},\varphi}(\mu,\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\mu+\nu,Y\rangle}\pi_{G(s),\Phi^+}(w.\nu)\,\mathrm{d}_{\mathfrak{t}^*}\mu\,\mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*}\nu. \end{aligned} \tag{7.34}$$

Mais, il résulte des propriétés des fonctions $F^{\mathscr{W}}_{G(s),\mathrm{j},\varphi}$ que $\Psi^{\Phi_I^+,w}_{\mathscr{W},\varphi}$ admet une transformée de Fourier par rapport à la variable μ. Alors, posant pour $\nu \in \mathfrak{a}^*$ et $X \in \mathfrak{t}$,

$$\eta^{\Phi_I^+,w}_{\mathscr{W},\varphi}(X,\nu) = \int_{\mathfrak{t}^*} \Psi^{\Phi_I^+,w}_{\mathscr{W},\varphi}(\mu,\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\mu,X\rangle}\,\mathrm{d}_{\mathfrak{t}^*}\mu$$

et écrivant $Y \in \mathrm{ij}_{\mathbb{R}}$ sous la forme $Y = Y_0 - \mathrm{i}\pi y$ avec $Y_0 \in \mathfrak{t}$ et $y \in \mathfrak{a}$, il vient

$$\begin{aligned} A_T(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g) &= \breve{\chi}'\big(\tilde{s}^{-1}_{g_{\mathscr{W}}}\exp_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}} T\big)\sum_{Y\in\mathrm{ij}_{\mathbb{R}}} b_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}},T}\big(\mathrm{j},\Phi^+,Y\big) \\ &\quad\times \int_{C(\Phi^+)} \eta^{\Phi_I^+,w}_{\mathscr{W},\varphi}(Y_0,\nu)\mathrm{e}^{-\pi\langle\nu,y\rangle}\pi_{G(s),\Phi^+}(w.\nu)\,\mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*}\nu. \end{aligned} \tag{7.35}$$

Posons alors pour $T \in \mathfrak{e}_{g_{\mathscr{W}}} \cap E_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}$,

$$a_T(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g) = \sum_{Y\in\mathrm{ij}_{\mathbb{R}}} \big|b_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}},T}\big(\mathrm{j},\Phi^+,Y\big)\big| \int_{C(\Phi^+)} \big|\eta^{\Phi_I^+,w}_{\mathscr{W},\varphi}(Y_0,\nu)\big|\mathrm{e}^{-\pi\langle\nu,y\rangle}\pi_{G(s),\Phi^+}(\nu)\,\mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*}\nu,$$

de sorte que

$$\left|A_T\big(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g\big)\right| \leqslant a_T\big(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g\big).$$

D'autre part, si pour $Y \in \mathrm{i}\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$, on pose

$$c(Y) = \sum_{T \in \mathfrak{e}_{g\mathscr{W}} \cap E_{\widetilde{R}_{g\mathscr{W}},\tilde{s}_{g\mathscr{W}}}} \left|b_{\widetilde{R}_{g\mathscr{W}},\tilde{s}_{g\mathscr{W}},T}\big(\mathrm{j}, \Phi^+, Y\big)\right|, \tag{7.36}$$

on a

$$\sum_{T \in \mathfrak{e}_{g\mathscr{W}} \cap E_{\widetilde{R}_{g\mathscr{W}},\tilde{s}_{g\mathscr{W}}}} a_T(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g) = \sum_{Y \in \mathrm{i}\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}} c(Y) \int\limits_{C(\Phi^+)} \left|\eta_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(Y_0,\nu)\right| \mathrm{e}^{-\pi\langle\nu,y\rangle} \pi_{G(s),\Phi^+}(\nu)\,\mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*}\nu. \tag{7.37}$$

Il résulte de la Proposition 7.5.1 et du Lemme 24 que la fonction $c(Y)$ vérifie

(i) il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $Y \in \mathrm{i}\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$, $c(Y) \leqslant M$,
(ii) si $Y \in \mathrm{i}\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$ est tel que $c(Y) \neq 0$, alors $Y \in \mathfrak{j}_{\tilde{s}_{g\mathscr{W}}}$ et, si l'on écrit $Y = Y_0 - \mathrm{i}\pi y$ avec $Y_0 \in \mathfrak{t}$ et $y \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{a}_{\tilde{s}_{g\mathscr{W}}}(\Phi^+)$.

Soit $\theta : \mathfrak{a}_{\tilde{s}_{g\mathscr{W}}} \to \mathfrak{t}$ une application telle que $\theta(y) - \mathrm{i}\pi y \in \mathfrak{j}_{\tilde{s}_{g\mathscr{W}}}$, $y \in \mathfrak{a}_{\tilde{s}_{g\mathscr{W}}}$. Alors, on a

$$(\mathfrak{t} - \mathrm{i}\pi y) \cap \mathfrak{j}_{\tilde{s}_{g\mathscr{W}}} = \theta(y) - \mathrm{i}\pi y + \mathfrak{t}_1,\ y \in \mathfrak{a}_{\tilde{s}_{g\mathscr{W}}}, \tag{7.38}$$

$\mathfrak{t}_1$ étant le réseau de $\mathfrak{t}$ relatif au groupe $(\widetilde{R}_{g\mathscr{W}}, \bar{j}_{g\mathscr{W}}, \overline{(\boldsymbol{R}_{g\mathscr{W}})_0})$ introduit au numéro 7.6. On déduit de (7.37), (7.38) et des propriétés (i) et (ii) de la fonction $c(Y)$, la majoration

$$\begin{aligned}&\sum_{T \in \mathfrak{e}_{g\mathscr{W}} \cap E_{\widetilde{R}_{g\mathscr{W}},\tilde{s}_{g\mathscr{W}}}} a_T(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g)\\ &\quad\leqslant M \sum_{y \in \mathfrak{a}_{\tilde{s}_{g\mathscr{W}}}(\Phi^+)} \int\limits_{C(\Phi^+)} \sum_{Y \in \mathfrak{t}_1} \left|\eta_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}\big(\theta(y) + Y, \nu\big)\right| \mathrm{e}^{-\pi\langle\nu,y\rangle} \pi_{G(s),\Phi^+}(\nu)\,\mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*}\nu.\end{aligned} \tag{7.39}$$

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ (respectivement $(\beta_1, \ldots, \beta_r)$) une (respectivement la) base de racines simples de Φ_I (respectivement Φ^+). Soit $\Phi_I^\vee$ le système de racines dans $\mathfrak{t}$ dual de Φ_I. Alors, $2\mathrm{i}\pi\Phi_I^\vee$ est contenu dans $\mathfrak{t}_1$ et il existe $H_{s+1}, \ldots, H_n \in \mathfrak{t}_1$, complétant $(\mathrm{i}H_{\alpha_1}, \ldots, \mathrm{i}H_{\alpha_s})$ en une base de $\mathfrak{t}$. Soit $\mathfrak{t}_1'$ le réseau de $\mathfrak{t}$ engendré par $2\mathrm{i}\pi\Phi_I^\vee$ et $H_{s+1}, \ldots, H_n$. C'est un sous-réseau de $\mathfrak{t}_1$ et on choisit dans $\mathfrak{t}_1$ un ensemble de représentants, $Y_1, \ldots, Y_l$, du groupe fini $\mathfrak{t}_1/\mathfrak{t}_1'$. On considère un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ (respectivement $(y_1, \ldots, y_q)$) sur $\mathfrak{t}^*$ (respectivement $\mathfrak{a}^*$) tel que

$$x_j = \begin{cases} \mathrm{i}H_{\alpha_j}, & 1 \leqslant j \leqslant s,\\ \frac{1}{2\pi}H_j, & s+1 \leqslant j \leqslant n, \end{cases} \qquad y_j = H_{\beta_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant r.$$

Désignons par $C_{r,q}$ le cône constitué des $(y_1, \ldots, y_q) \in \mathbb{R}^q$ tels que $y_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant r$.

Nous utilisons les systèmes de coordonnées que nous venons d'introduire pour identifier $\mathfrak{t}^* \times \mathfrak{a}^*$ avec $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$. Dans ces conditions, $\mathfrak{t}^* \times C(\Phi^+)$ s'identifie avec $\mathbb{R}^n \times C_{r,q}$ et le réseau $\mathfrak{t}_1'^*$ dual du réseau $\mathfrak{t}_1'$ avec le réseau $\mathbb{Z}^n$ de $\mathbb{R}^n$.

Soit $U = \{x \in \mathbb{R}^n\colon x_1 x_2 \cdots x_n \neq 0\}$. Dans [34, p. 128], nous avons introduit l'espace de Fréchet $\mathscr{E}_{n,r,q}$ des fonctions φ continues sur $\mathbb{R}^n \times C_{r,q}$, $\mathscr{C}^\infty$ sur $U \times C_{r,q}$ et dont toutes les dérivées partielles sont Lebesgue intégrables, muni des semi-normes

$$\nu_p(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n \times C_{r,q}} \left|\partial_p \varphi(x)\right| \mathrm{d}x, \quad p \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_q],$$

∂_p étant l'opérateur différentiel $p(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_q})$. La formule sommatoire de Poisson par rapport au réseau $\mathbb{Z}^n$ de $\mathbb{R}^n$ s'applique aux éléments de $\mathscr{E}_{n,r,q}$.

Si l'on considère $\pi_{G(s),\Phi^+}$ comme la fonction $(\mu, \nu) \mapsto \pi_{G(s),\Phi^+}(\nu)$, il résulte de la Proposition 6.10.1 et de [34, Proposition 5, p. 111 et Corollaire 2, p. 115] que l'application $\varphi \mapsto \Psi_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(1 + \pi_{G(s),\Phi^+})$ est linéaire continue de $\mathscr{S}(\mathfrak{g}(s)^*)$ dans $\mathscr{E}_{n,r,q}$. Mais alors, d'après [34, Théorème 4, p. 119 et Lemme 26, p. 128], il existe $p_1, \ldots, p_k \in S(\mathfrak{t}^*)$ tels que

$$\sup_{X \in \mathfrak{t}} \sum_{Y \in \mathfrak{t}_1'} \left|\eta_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(X + Y, \nu)\right| \leqslant \sum_{j=1}^k \int\limits_{\mathfrak{t}^*} \left|\partial_{p_j} \Psi_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(\mu, \nu)\right| \mathrm{d}_{\mathfrak{t}^*}\mu, \quad \nu \in C\bigl(\Phi^+\bigr),$$

d'où l'on déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{Y \in \mathfrak{t}_1} \left|\eta_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(X + Y, \nu)\right| &= \sum_{j=1}^l \sum_{Y \in \mathfrak{t}_1'} \left|\eta_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(X + Y_j + Y, \nu)\right| \\ &\leqslant l \sum_{j=1}^k \int\limits_{\mathfrak{t}^*} \left|\partial_{p_j} \Psi_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(\mu, \nu)\right| \mathrm{d}\mu, \nu \in C\bigl(\Phi^+\bigr), \quad X \in \mathfrak{t}. \end{aligned}$$

Reportant cette inégalité dans (7.39), on trouve la majoration

$$\begin{aligned} &\sum_{T \in \mathfrak{e}_{g_{\mathscr{W}}} \cap E_{\tilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}, \tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}} a_T(\varphi \, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*} g) \\ &\quad \leqslant l M \sum_{j=1}^k \int\limits_{\mathfrak{t}^* \times C(\Phi^+)} \left|\partial_{p_j} \Psi_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(\mu, \nu)\right| \left\{ \sum_{y \in \mathfrak{a}_{\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}(\Phi^+)} \mathrm{e}^{-\pi\langle \nu, y\rangle} \right\} \pi_{G(s),\Phi^+}(\nu) \, \mathrm{d}_{\mathfrak{t}^*}\mu \, \mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*}\nu. \end{aligned} \tag{7.40}$$

Cependant, comme $\mathfrak{a}_{\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}(\Phi^+) \subset \sum_{\alpha \in \Phi^+} \mathbb{N} H_\alpha$, il existe une constante $M_1 > 0$ telle que pour $\nu \in C(\Phi^+)$, on ait

$$\left\{ \sum_{y \in \mathfrak{a}_{\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}(\Phi^+)} \mathrm{e}^{-\pi\langle \nu, y\rangle} \right\} \pi_{G(s),\Phi^+}(\nu) \leqslant \left\{ \sum_{y \in \sum_{\alpha \in \Phi^+} \mathbb{N} H_\alpha} \mathrm{e}^{-\pi\langle \nu, y\rangle} \right\} \pi_{G(s),\Phi^+}(\nu)$$

$$= \Big\{ \prod_{\substack{\alpha \in \Phi^+ \\ \alpha \text{ simple}}} \big(1 - \mathrm{e}^{-\pi \langle \nu, H_\alpha \rangle}\big)^{-1} \Big\} \pi_{G(s),\Phi^+}(\nu)$$
$$\leqslant M_1 \big(1 + \pi_{G(s),\Phi^+}(\nu)\big).$$

Reportant ceci dans (7.40), on obtient

$$\sum_{T \in \mathfrak{e}_{g_{\mathscr{W}}} \cap E_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}, \tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}} a_T(\varphi\, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*} g)$$
$$\leqslant l M M_1 \sum_{j=1}^{k} \int_{\mathfrak{t}^* \times C(\Phi^+)} \big|\partial_{p_j} \Psi_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+, w}(\mu, \nu)\big| \big(1 + \pi_{G(s),\Phi^+}(\nu)\big)\, \mathrm{d}_{\mathfrak{t}^*} \mu\, \mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*} \nu. \tag{7.41}$$

La majoration (7.41) montre que la série $\sum_{T \in \mathfrak{e}_{g_{\mathscr{W}}} \cap E_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}, \tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}} a_T(\varphi\, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*} g)$ converge et que l'application $\varphi \mapsto \sum_{T \in \mathfrak{e}_{g_{\mathscr{W}}} \cap E_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}, \tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}} a_T(\varphi\, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*} g)$ est une semi-norme continue sur $\mathscr{S}(\mathfrak{g}(s)^*)$. Elle justifie aussi les égalités formelles (7.31), (7.29) et (7.25)–(7.27) en montrant que les séries qui y apparaissent sont absolument convergentes. Elle montre également que la série de distributions $\upsilon_{G,\chi,s}$ converge dans l'espace $\mathscr{S}'(\mathfrak{g}(s)^*)$.

Maintenant, nous pouvons calculer $A_{\mathfrak{j},\chi'}^{\mathscr{W},\Phi_I^+,w}(\varphi\, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*} g)$. En fait, compte tenu de la formule (7.16) définissant la fonction $b_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}, \chi', \tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}$, la majoration (7.41) montre également que l'on peut permuter les signes sommes et intégrale dans l'expression obtenue en reportant (7.35) dans (7.33) pour écrire

$$A_{\mathfrak{j},\chi'}^{\mathscr{W},\Phi_I^+,w}(\varphi\, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*} g)$$
$$= \int_{C(\Phi^+)} \Big\{ \sum_{Y \in \mathfrak{i}\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}} b_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}, \chi', \tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}} \big(\mathfrak{j}, \Phi^+, Y\big) \eta_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+, w}(Y_0, \nu) \mathrm{e}^{-\pi \langle \nu, y \rangle} \Big\} \pi_{G(s),\Phi^+}(w.\nu)\, \mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*} \nu, \tag{7.42}$$

tout en ayant convergence absolue :

$$\int_{C(\Phi^+)} \Big\{ \sum_{Y \in \mathfrak{i}\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}} \big|b_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}, \chi', \tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}} \big(\mathfrak{j}, \Phi^+, Y\big) \eta_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+, w}(Y_0, \nu)\big| \mathrm{e}^{-\pi \langle \nu, y \rangle} \Big\} \pi_{G(s),\Phi^+}(\nu)\, \mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*} \nu < +\infty.$$

Mais alors, tenant compte des propriétés de la fonction $b_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}, \chi', \tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}$ énoncées dans le Lemme 25 et de la relation (7.38), il vient

$$A_{\mathfrak{j},\chi'}^{\mathscr{W},\Phi_I^+,w}(\varphi\, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*} g)$$
$$= \int_{C(\Phi^+)} \Big\{ \sum_{y \in \mathfrak{a}_{\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}} \Big\{ \sum_{Y \in \mathfrak{t}_1} \eta_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+, w}\big(\theta(y) + Y, \nu\big) \breve{\chi}'(\exp_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}} Y) \Big\}$$
$$\times b_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}, \chi', \tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}} \big(\mathfrak{j}, \Phi^+, \theta(y) - \mathrm{i}\pi y\big) \mathrm{e}^{-\pi \langle \nu, y \rangle} \Big\} \pi_{G(s),\Phi^+}(w.\nu)\, \mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*} \nu. \tag{7.43}$$

Cependant, il résulte de ce que la fonction $\Psi_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(1+\pi_{G(s),\Phi^+})$ est dans $\mathscr{E}_{n,r,q}$, de [34, Théorème 4, p. 119 et Lemme 26, p. 128] et du fait que $\mathfrak{t}_1'$ est un sous-réseau de $\mathfrak{t}_1$ que l'on peut appliquer la formule sommatoire de Poisson pour obtenir

$$\sum_{Y\in\mathfrak{t}_1}\eta_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}\big(\theta(y)+Y,\nu\big)\breve{\chi}'(\exp_{\widetilde{R}_{g\mathscr{W}}}Y)=\operatorname{vol}(\mathfrak{t}_1)^{-1}\sum_{\mu\in\mathfrak{t}^*_{\chi'}}\Psi_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(\mu,\nu)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\mu,\theta(y)\rangle}.$$

Reportant cette relation dans (7.43) et tenant compte de la définition (7.18) de la fonction $c_{\widetilde{R}_{g\mathscr{W}},\chi',\tilde{s}_{g\mathscr{W}}}$, il vient

$$A_{\mathfrak{j},\chi'}^{\mathscr{W},\Phi_I^+,w}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g)=\operatorname{vol}(\mathfrak{t}_1)^{-1}\int\limits_{C(\Phi^+)}\Bigg\{\sum_{y\in\mathfrak{a}_{\tilde{s}_{g\mathscr{W}}}}\Bigg\{\sum_{\mu\in\mathfrak{t}^*_{\chi'}}\Psi_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(\mu,\nu)$$
$$\times c_{\widetilde{R}_{g\mathscr{W}},\chi',\tilde{s}_{g\mathscr{W}}}\big(\mathfrak{j},\Phi^+,\mu,y\big)\mathrm{e}^{-\pi\langle\nu,y\rangle}\Bigg\}\pi_{G(s),\Phi^+}(w.\nu)\,\mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*}\nu.\quad(7.44)$$

Cependant, pour $\mu\in\mathfrak{t}^*_{\chi'}$ et $Y=Y_0-\mathrm{i}\pi y\in\mathrm{i}\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$, on a

$$\big|c_{\widetilde{R}_{g\mathscr{W}},\chi',\tilde{s}_{g\mathscr{W}}}\big(\mathfrak{j},\Phi^+,\mu,y\big)\big|\leqslant c(Y)\leqslant M,$$

comme il résulte de la définition (7.36) et de la propriété (i) de la fonction $c(Y)$. On en déduit que l'expression

$$a(\varphi)=\sum_{y\in\mathfrak{a}_{\tilde{s}_{g\mathscr{W}}}}\sum_{\mu\in\mathfrak{t}^*_{\chi'}}\int\limits_{C(\Phi^+)}\big|\Psi_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(\mu,\nu)c_{\widetilde{R}_{g\mathscr{W}},\chi',\tilde{s}_{g\mathscr{W}}}\big(\mathfrak{j},\Phi^+,\mu,y\big)\big|$$
$$\times\mathrm{e}^{-\pi\langle\nu,y\rangle}\pi_{G(s),\Phi^+}(\nu)\,\mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*}\nu$$

est finie, l'application $\varphi\mapsto a(\varphi)$ étant une semi-norme continue sur $\mathscr{S}(\mathfrak{g}(s)^*)$. Compte tenu de la formule (7.20) satisfaite par la fonction $q_{\widetilde{R}_{g\mathscr{W}},\chi',\tilde{s}_{g\mathscr{W}}}$, on en déduit d'une part que

$$b(\varphi)=\sum_{\mu\in\mathfrak{t}^*_{\chi'}}\int\limits_{C(\Phi^+)}\big|\Psi_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(\mu,\nu)\big|\big|q_{\widetilde{R}_{g\mathscr{W}},\chi',\tilde{s}_{g\mathscr{W}}}(\mu+\nu)\big|\pi_{G(s),\Phi^+}(\nu)\,\mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*}\nu\leqslant a(\varphi),\quad(7.45)$$

si bien que l'application $\varphi\mapsto b(\varphi)$ est une semi-norme continue sur $\mathscr{S}(\mathfrak{g}(s)^*)$, et d'autre part que l'on peut permuter les signes sommes et intégrale dans (7.44) pour écrire

$$A_{\mathfrak{j},\chi'}^{\mathscr{W},\Phi_I^+,w}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*}g)=\operatorname{vol}(\mathfrak{t}_1)^{-1}\sum_{\mu\in\mathfrak{t}^*_{\chi'}}\int\limits_{C(\Phi^+)}\Psi_{\mathscr{W},\varphi}^{\Phi_I^+,w}(\mu,\nu)q_{\widetilde{R}_{g\mathscr{W}},\chi',\tilde{s}_{g\mathscr{W}}}(\mu+\nu)$$
$$\times\pi_{G(s),\Phi^+}(w.\nu)\,\mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*}\nu.\quad(7.46)$$

7.11. Soit $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g}(s))$ et $\mathscr{W} \in [\mathscr{V}^{\mathfrak{j}}]$. Nous allons évaluer maintenant $A_{\mathfrak{j}}^{\mathscr{W}}(\varphi \, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*} g)$. Reportant (7.46) dans (7.32), et tenant compte de (7.30) et du fait que la restriction à $\mathfrak{j}^*$ de la fonction $q_{\widetilde{R}_{g\cdot\mathscr{W}},\chi',\tilde{s}_{g\cdot\mathscr{W}}}$ est $W(\Phi)$-invariante, on trouve

$$\begin{aligned} A_{\mathfrak{j},\chi'}^{\mathscr{W}}(\varphi \, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*} g) \\ = \operatorname{vol}(\mathfrak{t}_1)^{-1} \sum_{\mu \in \mathfrak{t}_{\chi'}^*} \int_{\mathfrak{a}^*} F_{G(s),\mathfrak{j},\varphi}^{\mathscr{W}}(\mu+\nu) \pi_{G(s),\mathfrak{j},\mathbf{s}}(\mu+\nu) q_{\widetilde{R}_{g\cdot\mathscr{W}},\chi',\tilde{s}_{g\cdot\mathscr{W}}}(\mu+\nu) \, \mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*}\nu. \end{aligned} \tag{7.47}$$

De même, utilisant (7.45), on voit que l'expression

$$a_{\mathfrak{j},\chi'}^{\mathscr{W}}(\varphi) = \operatorname{vol}(\mathfrak{t}_1)^{-1} \sum_{\mu \in \mathfrak{t}_{\chi'}^*} \int_{\mathfrak{a}^*} \left| F_{G(s),\mathfrak{j},\varphi}^{\mathscr{W}}(\mu+\nu) \right| \left| \pi_{G(s),\mathfrak{j},\mathbf{s}}(\mu+\nu) \right| \left| q_{\widetilde{R}_{g\cdot\mathscr{W}},\chi',\tilde{s}_{g\cdot\mathscr{W}}}(\mu+\nu) \right| \mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*}\nu \tag{7.48}$$

est finie et que l'application $\varphi \mapsto a_{\mathfrak{j},\chi'}^{\mathscr{W}}(\varphi)$ est une semi-norme continue sur $\mathscr{S}(\mathfrak{g}(s)^*)$.

Cependant, avec les notations des numéros 6.2, 7.4 et 7.7, on a $\mathfrak{t}_\Gamma = \mathfrak{t}_{\Gamma_{g\cdot\mathscr{W}}}$ et

$$\mathfrak{t}_{\Gamma,\chi}^* = \mathfrak{t}_{\Gamma_{g\cdot\mathscr{W}},\chi_{g\cdot\mathscr{W}}}^* = \bigsqcup_{\substack{\chi' \in (\ker \bar{j}_{g\cdot\mathscr{W}})\hat{}/(\ker \bar{j}_{g\cdot\mathscr{W}} \cap J_0)^\perp \\ \chi'|_{\Gamma_{g\cdot\mathscr{W}}} = \chi_{g\cdot\mathscr{W}}}} \mathfrak{t}_{\chi'}^*, \tag{7.49}$$

tandis que, si $\mu \in \mathfrak{t}_{\Gamma,\chi}^*$ et $\chi' \in (\ker \bar{j}_{g\cdot\mathscr{W}})\hat{}$ est tel que $\chi'|_{\Gamma_{g\cdot\mathscr{W}}} = \chi_{g\cdot\mathscr{W}}$, on a $\mu \in \mathfrak{t}_{\chi'}^*$ si et seulement si $\chi'|_{\ker \bar{j}_{g\cdot\mathscr{W}} \cap J_0} = \eta_\mu$. Alors reportant (7.47) dans (7.28) et compte tenu de la relation (7.23) du Lemme 27, on trouve

$$\begin{aligned} A_{\mathfrak{j}}^{\mathscr{W}}(\varphi \, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*} g) &= \check{\chi}\left(s^{-1} s_{g\cdot\mathscr{W}}\right) \operatorname{vol}(\mathfrak{t}_1)^{-1} [\ker \bar{j}_{g\cdot\mathscr{W}} \cap J_0 : \Gamma_{g\cdot\mathscr{W}} \cap J_0]^{-1} \\ &\quad \times \sum_{\mu \in \mathfrak{t}_{\Gamma,\chi}^*} \int_{\mathfrak{a}^*} F_{G(s),\mathfrak{j},\varphi}^{\mathscr{W}}(\mu+\nu) \pi_{G(s),\mathfrak{j},\mathbf{s}}(\mu+\nu) q_{\widetilde{R}_{g\cdot\mathscr{W}},\chi_{g\cdot\mathscr{W}},\tilde{s}_{g\cdot\mathscr{W}}}(\mu+\nu) \, \mathrm{d}_{\mathfrak{a}^*}\nu. \end{aligned}$$

Or, on a l'isomorphisme de groupes finis $\mathfrak{t}_1/\mathfrak{t}_{\Gamma_{g\cdot\mathscr{W}}} \simeq \ker \bar{j}_{g\cdot\mathscr{W}} \cap J_0/\Gamma_{g\cdot\mathscr{W}} \cap J_0$ de sorte que, compte tenu de la relation (6.15) caractérisant la mesure $\mathrm{d}m_{\Gamma,\chi}^{\mathfrak{j}}$, il vient

$$\begin{aligned} A_{\mathfrak{j}}^{\mathscr{W}}(\varphi \, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)^*} g) = \check{\chi}\left(s^{-1} s_{g\cdot\mathscr{W}}\right) \int_{\mathfrak{j}_{\Gamma,\chi}^*} F_{G(s),\mathfrak{j},\varphi}^{\mathscr{W}}(\lambda) q_{\widetilde{R}_{g\cdot\mathscr{W}},\chi_{g\cdot\mathscr{W}},\tilde{s}_{g\cdot\mathscr{W}}}(\lambda) \\ \times \pi_{G(s),\mathfrak{j},\mathbf{s}}(\lambda) \, \mathrm{d}m_{\Gamma,\chi}^{\mathfrak{j}}(\lambda). \end{aligned} \tag{7.50}$$

D'autre part, posons

$$a_{\mathfrak{j}}^{\mathscr{W}}(\varphi) = \int_{\mathfrak{j}_{\Gamma,\chi}^*} \left| F_{G(s),\mathfrak{j},\varphi}^{\mathscr{W}}(\lambda) \right| \left| q_{\widetilde{R}_{g\cdot\mathscr{W}},\chi_{g\cdot\mathscr{W}},\tilde{s}_{g\cdot\mathscr{W}}}(\lambda) \right| \left| \pi_{G(s),\mathfrak{j},\mathbf{s}}(\lambda) \right| \mathrm{d}m_{\Gamma,\chi}^{\mathfrak{j}}(\lambda). \tag{7.51}$$

Il résulte de (7.23) que l'on a

$$\left|q_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},\chi_{g_{\mathscr{W}}},\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}(\lambda)\right| \leqslant \frac{[\ker \bar{j}_{g_{\mathscr{W}}} \cap J_0 : \Gamma_{g_{\mathscr{W}}} \cap J_0]}{[\ker \bar{j}_{g_{\mathscr{W}}} : \Gamma_{g_{\mathscr{W}}}]} \sum_{\substack{\chi' \in (\ker \bar{j}_{g_{\mathscr{W}}})\hat{}\ \chi'|_{\Gamma_{g_{\mathscr{W}}}} = \chi_{g_{\mathscr{W}}} \\ \chi'|_{\Gamma_{g_{\mathscr{W}}} \cap J_0} = \eta_\lambda}} \left|q_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},\chi',\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}(\lambda)\right|.$$

Alors, reportant cette inégalité dans (7.51) et tenant compte de (7.49), on obtient

$$a_{\mathrm{j}}^{\mathscr{W}}(\varphi) \leqslant [\ker \bar{j}_{g_{\mathscr{W}}} : \Gamma_{g_{\mathscr{W}}}]^{-1} \sum_{\substack{\chi' \in (\ker \bar{j}_{g_{\mathscr{W}}})\hat{}/((\ker \bar{j}_{g_{\mathscr{W}}} \cap J_0)\Gamma_{g_{\mathscr{W}}})^{\perp} \\ \chi'|_{\Gamma_{g_{\mathscr{W}}}} = \chi_{g_{\mathscr{W}}}}} a_{\mathrm{j},\chi'}^{\mathscr{W}}(\varphi),$$

d'où résulte que $a_{\mathrm{j}}^{\mathscr{W}}$ est une semi-norme continue sur $\mathscr{S}(\mathfrak{g}(s)^*)$.

7.12. Pour tout $\mathrm{j} \in \mathrm{car}(\mathfrak{g}(s))$ et tout élément $\mathscr{W} \in W(G(s),\mathrm{j}) \setminus [\mathscr{V}_s^{\mathrm{j}}]$, on choisit un de ses représentants dans $[\mathscr{V}_s^{\mathrm{j}}]$ noté de même $\mathscr{W}$, un élément $g_{\mathscr{W}} \in \mathscr{W}$ et on considère les objets associés comme plus haut $R_{g_{\mathscr{W}}}$, $\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}$, $\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}, \ldots$. On définit alors une fonction $\tilde{q}$, $G(s)$-invariante sur $\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$ en décidant qu'elle est nulle en dehors de $\mathscr{V}_s \cap \mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$ et que, pour $\mathrm{j} \in \mathrm{Car}_{G(s)}(\mathfrak{g}(s))$, $\mathscr{W} \in W(G(s),\mathrm{j}) \setminus [\mathscr{V}_s^{\mathrm{j}}]$ et $g \in \mathscr{W} \cap \mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$, on a

$$\tilde{q}(g) = \begin{cases} 0, & \text{si } p_G(s) \notin (R_{g_{\mathscr{W}}})_0\Gamma, \\ \breve{\chi}(s^{-1}s_{g_{\mathscr{W}}}) q_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},\chi_{g_{\mathscr{W}}},\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}(g|_{\mathfrak{r}_{g_{\mathscr{W}}}(s_{g_{\mathscr{W}}})}), & \text{sinon.} \end{cases} \tag{7.52}$$

Pour démontrer l'existence de $\tilde{q}$, il faut s'assurer que la fonction $\tilde{q}|_{\mathscr{W}}$ définie sur $\mathscr{W}$ par l'Éq. (7.52) est invariante par

$$N_{G(s)}(\mathrm{j})(\mathscr{W}) = \{x \in N_{G(s)}(\mathrm{j}) / x.\mathscr{W} = \mathscr{W}\}.$$

Si $p_G(s) \notin (R_{g_{\mathscr{W}}})_0\Gamma$, il n'y a rien à démontrer.

Avant de traiter le cas contraire, il nous faut introduire une notation. Si $x \in G(s)$, $g \in \mathscr{V}_s$ et si R_g est un facteur réductif de B_g vérifiant les conditions stipulées avant l'énoncé du Lemme 23, l'application $y \mapsto xyx^{-1}$ définit un isomorphisme de groupes presque algébriques de R_g dans un facteur réductif $R_{x.g}$ de $B_{x.g}$ vérifiant les mêmes conditions pour $x.g$, lequel se relève de manière unique en un isomorphisme de groupes presque algébriques, encore noté $y \mapsto xyx^{-1}$, de $\widetilde{R}_g$ dans $\widetilde{R}_{x.g}$. Avec ces notations, il est clair que l'on a $x\Gamma_g x^{-1} = \Gamma_{x.g}$ et $\chi_{x.g}(\gamma) = {}^x\chi_g(\gamma) := \chi_g(x^{-1}\gamma x)$, $\gamma \in \Gamma_{x.g}$.

Supposons donc que $p_G(s) \in (R_{g_{\mathscr{W}}})_0\Gamma$ et soit $x \in N_{G(s)}(\mathrm{j})(\mathscr{W})$, $g \in \mathscr{W} \cap \mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$. Compte tenu des propriétés de l'ouvert $\mathscr{V}_s$, il existe $y \in Z_{G(s)}(\mathrm{j})$ tel que $y\widetilde{R}_{x^{-1}.g_{\mathscr{W}}}y^{-1} = \widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}$. Utilisant les propriétés d'invariance des fonctions de Poisson–Plancherel (7.5) et (7.7) déjà démontrées dans le cas des groupes réductifs simplement connexes, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\tilde{q}|_{\mathscr{W}}(x.g) &= \breve{\chi}(s^{-1}s_{g_{\mathscr{W}}}) q_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},\chi_{g_{\mathscr{W}}},\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}(x.g|_{\mathfrak{r}_{g_{\mathscr{W}}}(s_{g_{\mathscr{W}}})}) \\
&= \breve{\chi}(s^{-1}s_{g_{\mathscr{W}}}) q_{\widetilde{R}_{x^{-1}.g_{\mathscr{W}}},\chi_{x^{-1}.g_{\mathscr{W}}},x^{-1}\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}x}(g|_{\mathfrak{r}_{x^{-1}.g_{\mathscr{W}}}(x^{-1}s_{g_{\mathscr{W}}}x)}) \\
&= \breve{\chi}(s^{-1}s_{g_{\mathscr{W}}}) q_{\widetilde{R}_{x^{-1}.g_{\mathscr{W}}},\chi_{x^{-1}.g_{\mathscr{W}}},x^{-1}\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}x}(g|_{\mathrm{j}})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \breve{\chi}\left(s^{-1}s_{g_{\mathscr{W}}}\right)q_{\widetilde{R}_{x^{-1}.g_{\mathscr{W}}},\chi_{x^{-1}.g_{\mathscr{W}}},x^{-1}\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}x}\left(y^{-1}.g|_{\mathfrak{j}}\right)\\
&= \breve{\chi}\left(s^{-1}s_{g_{\mathscr{W}}}\right)q_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},{}^{yx^{-1}}\chi_{g_{\mathscr{W}}},yx^{-1}\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}xy^{-1}}(g|_{\mathfrak{j}})\\
&= \breve{\chi}\left(s^{-1}s_{g_{\mathscr{W}}}\right)q_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},\chi_{g_{\mathscr{W}}},\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}\left(xy^{-1}.g|_{\mathfrak{r}_{g_{\mathscr{W}}}(s_{g_{\mathscr{W}}})}\right),
\end{aligned}
$$

où l'on considère xy^{-1} agissant par automorphisme dans $\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}$. Mais, il résulte du Lemme 23 que cet automorphisme fixe le caractère $\chi_{g_{\mathscr{W}}}$ et donc la distribution $v_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},\chi_{g_{\mathscr{W}}},\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}$. Comme la fonction généralisée $m_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}}(\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}),\chi_{g_{\mathscr{W}}}}$ est canonique, on déduit alors de (7.4) que l'adjoint de cet automorphisme laisse fixe la fonction $q_{\widetilde{R}_{g_{\mathscr{W}}},\chi_{g_{\mathscr{W}}},\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}}$. Compte tenu de ce qui précède, ceci montre que

$$\tilde{q}|_{\mathscr{W}}(x.g) = \tilde{q}|_{\mathscr{W}}(g),$$

comme voulu.

Il est clair que la fonction $\tilde{q}$ est analytique sur $\mathscr{V}_s \cap \mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$. Maintenant, il résulte de la définition de $\tilde{q}$, du fait que, pour $\mathfrak{j} \in \operatorname{car}(\mathfrak{g}(s))$ et $\mathscr{W} \in [\mathscr{V}_s^{\mathfrak{j}}]$, $a_{\mathfrak{j}}^{\mathscr{W}}$ est une semi-norme continue sur $\mathscr{S}(\mathfrak{g}(s)^*)$ et du Lemme 17(ii) que la mesure $|\tilde{q}|\,\mathrm{d}m_{G(s),\chi}$ est une mesure de Radon tempérée. Mais alors, les formules (6.16), (7.50) et (7.25) montrent que

$$\hat{v_{G,\chi,s}} = \tilde{q}m_{G(s),\chi},$$

d'où l'assertion (i) du théorème. Il nous reste à voir que la fonction $q_{G,s,\chi}$ vérifie la relation (7.8). La définition de la fonction généralisée $m_{G(s),\chi}$ montre que tout ouvert non vide de $\mathscr{V}_s \cap \mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$ est de mesure strictement positive pour $\mathrm{d}m_{G(s),\chi}$. Il résulte alors de l'analycité de la fonction $\tilde{q}$ qu'elle est indépendante des choix faits. En particulier, étant donné $g \in \mathscr{V}_s \cap \mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}$, les choix de $\mathscr{W}$, $g_{\mathscr{W}}$ et $\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}}$ tels que $\mathscr{W} \ni g$, $g_{\mathscr{W}} = g$ et $\tilde{s}_{g_{\mathscr{W}}} = \tilde{s}_g$ permettent d'obtenir l'égalité $q_{G,s,\chi|\mathscr{W}\cap\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}} = \tilde{q}|_{\mathscr{W}\cap\mathfrak{g}(s)^*_{r,\chi}}$ qui, appliquée à g, fournit (7.8). □

7.13. Avec les notations du Théorème 7.4.1, on définit la fonction de Poisson–Plancherel $q_{G,\chi}$ sur l'ensemble des couples (s, g) tels que $s \in \widetilde{G}_{\mathrm{ell,bp}}$ et $g \in \mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi}$ en posant :

$$q_{G,\chi}(s, g) = q_{G,\chi,s}(g). \tag{7.53}$$

Toujours avec les notations du Théorème 7.4.1, il est clair que la fonction $q_{G,\chi}$ vérifie les relations suivantes :

$$q_{G,\chi}\left(xsx^{-1}, x.g\right) = q_{G,\chi}(s, g),\ x \in G, \tag{7.54}$$

$$q_{G,\chi}(s\gamma, g) = \breve{\chi}\left(\gamma^{-1}\right)q_{G,\chi}(s, g),\ \gamma \in p_G^{-1}(\Gamma), \tag{7.55}$$

$$q_{G',\chi'}\left(a(s), a(g)\right) = q_{G,\chi}(s, g), \tag{7.56}$$

où $s \in \widetilde{G}_{\mathrm{ell,bp}}$, $g \in \mathscr{V} \cap \mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi} = \mathscr{V}_s \cap \mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi}$, $a : (G, j, \boldsymbol{G}) \to (G', j', \boldsymbol{G}')$ est un isomorphisme de groupes presque algébriques et χ' est le caractère de $\Gamma' = a(\Gamma)$ tel que $\chi = \chi' \circ a$.

8. Paramétrisation de représentations unitaires. Fonctions de Plancherel et de Poisson–Plancherel

8.1. Soit $g \in \mathfrak{g}^*$. On dispose donc de l'extension métaplectique $G(g)^g$ de $G(g)$ et de la fonction δ^g sur $G(g)^g$ introduites au numéro 3.4. On désigne toujours par ϵ l'élément non trivial du noyau de la projection naturelle de $G(g)^g$ sur $G(g)$. D'autre part, le sous-groupe $\ker j$ se relève de manière unique en un sous-groupe de $G(g)^g$, encore noté $\ker j$, au moyen du morphisme qui, à $\gamma \in \ker j$, fait correspondre l'unique élément γ de $G(g)^g$ situé au-dessus et tel que $\delta^g(\gamma) = 1$.

On désigne par $X_{G,\chi}(g)$ l'ensemble des données de G-χ-admissibilités pour g : c'est l'ensemble des représentations unitaires irréductibles τ de $G(g)^g$ qui sont telles que :

$$\tau(\epsilon) = -\mathrm{Id}, \qquad \tau(\gamma) = \chi(\gamma)\mathrm{Id}, \quad \gamma \in \Gamma, \qquad \tau(\exp X) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}g(X)}\mathrm{Id}, \quad X \in \mathfrak{g}(g).$$

Alors, g est dite G-χ-admissible si $X_{G,\chi}(g)$ est non vide. Si g est fortement régulière, elle est G-χ-admissible si et seulement si elle appartient à $\mathfrak{g}^*_{G,\chi}$.

On remarquera que si $\tau \in X_{G,\chi}(g)$, $\delta^g\tau$ passe au quotient en une représentation projective de $G(g)$ dans l'espace de τ.

On note $X_{G,\chi}$ l'ensemble des couples (g,τ) tels que $g \in \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$ et $\tau \in X_{G,\chi}(g)$. Alors G opère de manière naturelle sur $X_{G,\chi}$, via l'action coadjointe sur le premier facteur et par transport de structure sur le second.

Plus généralement, soit $(G', j', \boldsymbol{G}')$ un autre groupe presque algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ et $a : (G, j, \boldsymbol{G}) \to (G', j', \boldsymbol{G}')$ un isomorphisme de groupes presque algébriques. Reprenant les notations du Théorème 7.4.1(iii), on voit aisément que a induit par transport de structure une bijection $a : X_{G,\chi} \to X_{G',\chi'}$ telle que, pour tout $g \in \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$, $a(X_{G,\chi}(g)) = X_{G',\chi'}(a(g))$. En particulier, on peut écrire $a(g,\tau) = (a(g), {}^a\tau)$, pour $(g,\tau) \in X_{G,\chi}$.

À tout élément $(g,\tau) \in X_{G,\chi}$, Duflo fait correspondre une représentation unitaire irréductible $T_{G,g,\tau}$ de G, notée plus simplement $T_{g,\tau}$, de telle sorte que l'application $(g,\tau) \mapsto T_{g,\tau}$ induise une injection de $G \setminus X_{G,\chi}$ dans l'ensemble $\widehat{G}_\chi$ des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles de G dont la restriction à Γ est un multiple du caractère χ (voir [10, V.2, p. 146]).

Nous ne rappellerons pas la construction des représentations $T_{g,\tau}$, mais nous donnerons à la Section 9.3 la description du ψ_G-caractère d'une grosse partie d'entre elles, ce qui suffit, lorsque G est unimodulaire, à caractériser celles-ci.

8.2. Soit $g \in \mathfrak{g}^*_r$. Comme J_g agit trivialement dans $\mathfrak{g}(g)$, on voit que $\widetilde{\mathrm{Ad}}_G(p_G^{-1}(J_g))$ est contenu dans $\mathrm{ML}(\mathfrak{g})(\beta_g)$ de sorte que le morphisme de J_g dans $\mathrm{Sp}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g))$ induit par l'action adjointe se relève en le morphisme $\phi_{\beta_g} \circ \widetilde{\mathrm{Ad}}_{G|p_G^{-1}(J_g)}$ de $p_G^{-1}(J_g)$ dans $\mathrm{Mp}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g))$ (voir le numéro 4.3), lequel induit un morphisme injectif ϕ_g de $p_G^{-1}(J_g)$ dans $G(g)^g$.

Si G satisfait de plus aux hypothèses du numéro 4.7, il se relève naturellement en un sous-groupe de $\widetilde{G}$ (voir le numéro 6.3), de sorte que l'on peut considérer ϕ_g, ou plutôt sa restriction, comme un morphisme injectif de J_g dans $G(g)^g$.

8.3. Dans les paragraphes suivants, nous définissons la fonction de Plancherel ξ_G sur $X_G = \bigcup_{\chi \in \Gamma^\wedge} X_{G,\chi}$ et nous la relions à la fonction de Poisson–Plancherel $q_{G,\chi}$.

Nous commençons, dans ce numéro et le suivant, par décrire les fonctions de Plancherel pour les groupes réductifs. On suppose donc que $(G, j, \boldsymbol{G})$ est un groupe presque algébrique réductif et, dans un premier temps, que G est un groupe connexe simplement connexe. Soit $g \in \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$.

Alors $\boldsymbol{G}(g)$ est un tore, de sorte que $J_g = G(g)$. De plus, G étant simplement connexe, il satisfait aux hypothèses du numéro 4.7 si bien que l'on peut considérer ϕ_g comme un morphisme injectif de J_g dans $G(g)^g$. On en déduit immédiatement que l'application $\tau \mapsto \tau \circ \phi_g$ permet d'identifier $X_{G,\chi}(g)$ avec l'ensemble des (classes d'équivalence de) représentations unitaires irréductibles τ de J_g qui vérifient les relations suivantes :

$$\tau(\gamma) = \breve{\chi}(\gamma)\mathrm{Id}, \quad \gamma \in \Gamma, \qquad \tau(\exp X) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}g(X)}\mathrm{Id}, \quad X \in \mathfrak{j}_g.$$

Soit donc $\tau \in X_{G,\chi}(g)$. Soit Φ_g le système des racines réelles de $\mathfrak{j}_g$ dans $\mathfrak{g}$ et $\Phi_g^+ \subset \Phi_g$ un sous-ensemble de racines positives. Étant donné $\alpha \in \Phi_g$, on note $H_\alpha \in \mathfrak{j}_g$ la coracine de α, on choisit des vecteurs radiciels $X_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$ tels que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ et on pose $\gamma_\alpha = \exp(\pi(X_\alpha - X_{-\alpha}))$.

Alors, γ_α est un élément de J_g et, si γ_α peut dépendre du choix de X_α, le sous-ensemble $\{\gamma_\alpha, \gamma_\alpha^{-1}\}$ du groupe J_g n'en dépend pas et est stable par automorphismes intérieurs.

De plus, il résulte des définitions de δ^g et ϕ_g que $\delta^g \circ \phi_g$ est un caractère de J_g (voir [10, III.2 et III.3]).

On déduit de tout ceci que l'opérateur $\frac{1}{2}((\delta^g\tau) \circ \phi_g(\gamma_\alpha) + (\delta^g\tau) \circ \phi_g(\gamma_\alpha^{-1}))$ est scalaire et ne dépend que de α. On note alors $x_\tau(\alpha)$ l'unique valeur propre de cet opérateur : c'est un réel de valeur absolue inférieure ou égale à 1.

Enfin, le nombre $n_\alpha = \frac{1}{2}\sum \beta(H_\alpha)$, où la somme est prise sur l'ensemble des $\beta \in \Delta_{(\mathfrak{j}_g)_\mathbb{C},\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ telles que $\beta + \bar{\beta} \in \mathbb{R}^+\alpha$, est un entier, et on pose $\epsilon_\alpha = (-1)^{n_\alpha}$.

Avec ces notations, on a :

$$\xi_G(g,\tau) = \prod_{\alpha \in \Phi_g^+} \frac{|\sinh(\pi g(H_\alpha))|}{\cosh(\pi g(H_\alpha)) - \epsilon_\alpha x_\tau(\alpha)}. \tag{8.1}$$

La fonction ξ_G est la fonction de Plancherel–Harish-Chandra pour le groupe G. La formule (8.1) la définissant est due à Harish-Chandra [17].

Soit $(G', j', \boldsymbol{G}')$ un autre groupe presque algébrique réductif connexe simplement connexe et $a : G \to G'$ un isomorphisme de groupes presque algébriques. Dans le numéro 8.1, on a vu que si $\Gamma' = a(\Gamma)$ et si χ' est le caractère de Γ' obtenu en transportant le caractère χ de Γ à l'aide de a, alors a induit une bijection $a : (g,\tau) \mapsto (a(g), {}^a\tau)$ de $X_{G,\chi}$ sur $X_{G',\chi'}$.

On vérifie facilement qu'avec ces notations, on a

$$\xi_G(g,\tau) = \xi_{G'}\big(a(g), {}^a\tau\big), \quad (g,\tau) \in X_{G,\chi}. \tag{8.2}$$

En particulier, pour $x \in G$, il vient

$$\xi_G(g,\tau) = \xi_G\big(x.g, {}^x\tau\big). \tag{8.3}$$

8.4. Maintenant, on ne suppose plus que G est connexe simplement connexe. On note $\widetilde{G}$ le revêtement simplement connexe de la composante neutre G_0 de G, $p : \widetilde{G} \to G_0$ la projection naturelle, $\widetilde{\Gamma} = p^{-1}(\Gamma \cap G_0)$, $\tilde{j} = j \circ p$, $\tilde{\chi} = \chi \circ p|_{\widetilde{\Gamma}}$, $\widetilde{G}_{\mathrm{Ad}}$ le revêtement métalinéaire de G associé à sa représentation adjointe et $\tilde{p} : \widetilde{G} \to \widetilde{G}_{\mathrm{Ad}}$ le relèvement canonique de p. Alors, $(\widetilde{G}, \tilde{j}, \boldsymbol{G}_0)$ est un groupe presque algébrique et, avec les notations du numéro 7.4, pour tout $g \in \mathfrak{g}_r^*$, on a $\widetilde{R}_g = \widetilde{G}$, $\Gamma_g = \widetilde{\Gamma}$, $p_g = p$, $\tilde{p}_g = \tilde{p}$, $j_g = \tilde{j}$ et $\chi_g = \tilde{\chi}$. Si $g \in \mathfrak{g}_r^*$, on note $\widetilde{J}_g$ l'image inverse de J_g par p et on pose $\tilde{\phi}_g = \phi_g \circ \tilde{p}|_{\widetilde{J}_g}$. Alors, $\tilde{\phi}_g$ est un morphisme de $\widetilde{J}_g$ dans $G(g)^g$. De plus, $\mathfrak{g}_{G,\chi}^* = \mathfrak{g}_{\widetilde{G},\tilde{\chi}}^*$ et, si $g \in \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$ et $\tau \in X_{G,\chi}(g)$, toute composante irréductible de $\tau \circ \tilde{\phi}_g$ est un élément de $X_{\widetilde{G},\tilde{\chi}}(g)$, modulo l'identification du numéro 8.3.

Lemme 28. *Soit $g \in \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$ et $\tau \in X_{G,\chi}(g)$. Alors, le nombre $\xi_{\widetilde{G}}(g,\sigma)$ est indépendant du choix de la composante irréductible σ de $\tau \circ \tilde{\phi}_g$.*

Démonstration. On reprend les notations du numéro précédent que l'on applique au groupe $\widetilde{G}$. Étant donné $\alpha \in \Phi_g^+$, on considère l'opérateur :

$$\Xi(g,\tau,\alpha) = \left|\sinh \pi g(H_\alpha)\right|\left(\cosh \pi g(H_\alpha)\right)\mathrm{Id} - \frac{1}{2}\epsilon_\alpha\left(\delta^g\tau\left(p(\gamma_\alpha)\right) + \delta^g\tau\left(p\left(\gamma_\alpha^{-1}\right)\right)\right)^{-1}.$$

Alors, $\Xi(g,\tau,\alpha)$ laisse invariante, pour chaque $\sigma \in X_{\widetilde{G},\tilde{\chi}}(g)$, la composante isotypique de type σ de $\tau \circ \tilde{\phi}_g$ et y opère par multiplication par le scalaire

$$\frac{|\sinh(\pi g(H_\alpha))|}{\cosh(\pi g(H_\alpha)) - \epsilon_\alpha x_\sigma(\alpha)}.$$

Ainsi, les opérateurs $\Xi(g,\tau,\alpha)$, $\alpha \in \Phi_g^+$, commutent deux à deux, si bien que l'opérateur

$$\Xi(g,\tau) = \prod_{\alpha \in \Phi_g^+} \Xi(g,\tau,\alpha)$$

est bien défini. Par ailleurs, la fonction δ^g est centrale sur $G(g)^g$. Comme $G(g)$ permute les paires $\{\gamma_\alpha, \gamma_\alpha^{-1}\}$, $\alpha \in \Phi_g^+$, on voit que $\Xi(g,\tau)$ opère dans l'espace de τ par multiplication par le scalaire $\xi_{\widetilde{G}}(g,\sigma)$, où σ est une des composantes irréductibles de $\tau \circ \tilde{\phi}_g$. $\square$

Avec les notations précédentes, on pose alors :

$$\xi_G(g,\tau) = \xi_{\widetilde{G}}(g,\sigma). \tag{8.4}$$

Soit $(G', j', \boldsymbol{G}')$ un autre groupe presque algébrique réductif et $a : G \to G'$ un isomorphisme de groupes presque algébriques. Alors, on voit facilement que les fonctions ξ_G et $\xi_{G'}$ vérifient encore la relation (8.2). En particulier, ξ_G vérifie la relation (8.3).

Avant d'aller plus loin, nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme 29. *Soit $g \in \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$ et $s \in \widetilde{J}_g$. Alors, on a*

$$\begin{aligned}
&\left[G(g) : G(g)_0\Gamma\right]^{-1} \sum_{\tau \in X_{G,\chi}(g)} \dim\tau\, \xi_G(g,\tau)\, \mathrm{Tr}\left(\tau \circ \tilde{\phi}_g(s)\right) \\
&\quad = \left[\widetilde{J}_g : (\widetilde{J}_g)_0\Gamma_g\right]^{-1} \sum_{\sigma \in X_{\widetilde{G},\tilde{\chi}}(g)} \dim\sigma\, \xi_{\widetilde{G}}(g,\sigma)\, \mathrm{Tr}\left(\sigma(s)\right).
\end{aligned} \tag{8.5}$$

Démonstration. Le groupe $G(g)$ normalise son sous-groupe $G_0(g)$ et agit donc par automorphismes dans les revêtements de ce dernier, en particulier $\widetilde{J}_g$. Cette dernière action, centralisant Γ_g, induit une action naturelle de $G(g)$ dans $X_{\widetilde{G},\tilde{\chi}}(g)$. Ces actions remontent à $G(g)^g$. Si Γ^g est l'image inverse de Γ dans $G(g)^g$, on a $\Gamma^g = \Gamma \sqcup \epsilon\Gamma$.

Soit $\sigma \in X_{\widetilde{G},\tilde{\chi}}(g)$ et $G(g)_\sigma$ (respectivement $G(g)^g_\sigma$) le stabilisateur de σ dans $G(g)$ (respectivement $G(g)^g$). Alors, σ passe au quotient en une représentation de $G_0(g)^g$ qui se prolonge en une représentation projective, encore notée σ, de $G(g)^g_\sigma$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ et $\sigma(yx) = \sigma(y)\sigma(x)$, $x \in G(g)^g_\sigma$, $y \in G_0(g)^g\Gamma^g$,
(ii) $\sigma(\gamma) = \chi(\gamma)\mathrm{Id}$, $\gamma \in \Gamma$,
(iii) $\sigma(\epsilon) = -\mathrm{Id}$.

On définit le deux-cocycle c_σ du groupe $G(g)^g_\sigma$ passant au quotient à $G(g)_\sigma/G_0(g)\Gamma$ par $\sigma(xy) = c_\sigma(x,y)\sigma(x)\sigma(y)$, $x, y \in G(g)^g_\sigma$. On note $P(\sigma)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations projectives irréductibles σ' de $G(g)_\sigma/G_0(g)\Gamma$ telles que

$$\sigma'(xy) = c_\sigma(x,y)^{-1}\sigma'(x)\sigma'(y), \quad x, y \in G(g)_\sigma/G_0(g)\Gamma.$$

Si $\sigma' \in P(\sigma)$, $\sigma' \otimes \sigma$ est une vraie représentations de $G(g)^g_\sigma$ et on pose

$$\tau(\sigma,\sigma') = \mathrm{Ind}_{G(g)^g_\sigma}^{G(g)^g} \sigma' \otimes \sigma.$$

Alors, il résulte de la théorie de Mackey que l'application $\sigma' \mapsto \tau(\sigma,\sigma')$ est une bijection de $P(\sigma)$ sur le sous-ensemble $X^\sigma_{G,\chi}(g)$ de $X_{G,\chi}(g)$ constitué des représentations τ telles que σ soit une composante irréductible de $\tau \circ \tilde{\phi}_g$ et que l'on a

$$X_{G,\chi}(g) = \bigsqcup_{\sigma \in G(g)\backslash X_{\widetilde{G},\tilde{\chi}}(g)} X^\sigma_{G,\chi}(g).$$

Désignons respectivement par $A(s)$ et $B(s)$ les membres de gauche et de droite de l'Éq. (8.5). Alors, il résulte de ce qui précède et de la relation (8.4) que

$$A(s) = \big[G(g) : G(g)_0\Gamma\big]^{-1} \sum_{\sigma \in G(g)\backslash X_{\widetilde{G},\tilde{\chi}}(g)} \xi_{\widetilde{G}}(g,\sigma) \sum_{\sigma' \in P(\sigma)} \dim\tau(\sigma,\sigma')\,\mathrm{Tr}\big(\tau(\sigma,\sigma') \circ \tilde{\phi}_g(s)\big). \tag{8.6}$$

Mais, pour $\sigma \in X_{\widetilde{G},\tilde{\chi}}(g)$ et $\sigma' \in P(\sigma)$, on a

$$\dim\tau(\sigma,\sigma') = \big[G(g) : G(g)_\sigma\big]\dim\sigma\ \dim\sigma',$$
$$\mathrm{Tr}\big(\tau(\sigma,\sigma') \circ \tilde{\phi}_g(s)\big) = \dim\sigma' \sum_{x \in G(g)/G(g)_\sigma} \mathrm{Tr}\big({}^x\sigma(s)\big),$$

tandis que

$$\sum_{\sigma' \in P(\sigma)} (\dim\sigma')^2 = \big[G(g)_\sigma : G_0(g)\Gamma\big].$$

Reportant ceci dans (8.6), comme d'après (8.3), $\xi_{\widetilde{G}}(g, {}^x\sigma) = \xi_{\widetilde{G}}(g, \sigma)$, $x \in G(g)$, il vient

$$\begin{aligned} A(s) = {} & \bigl[G(g) : G(g)_0 \Gamma\bigr]^{-1} \sum_{\sigma \in G(g) \backslash X_{\widetilde{G},\tilde{\chi}}(g)} \dim \sigma \, \xi_{\widetilde{G}}(g, \sigma) \\ & \times \bigl[G(g) : G(g)_\sigma\bigr] \sum_{\sigma' \in P(\sigma)} (\dim \sigma')^2 \sum_{x \in G(g)/G(g)_\sigma} \operatorname{Tr}\bigl({}^x\sigma(s)\bigr) \\ = {} & \bigl[G(g) : G(g)_0 \Gamma\bigr]^{-1} \bigl[G(g) : G(g)_\sigma\bigr] \bigl[G(g)_\sigma : G_0(g) \Gamma\bigr] \\ & \times \sum_{\sigma \in X_{\widetilde{G},\tilde{\chi}}(g)} \dim \sigma \xi_{\widetilde{G}}(g, \sigma) \operatorname{Tr}\bigl(\sigma(s)\bigr) = B(s). \end{aligned}$$

D'où le lemme. □

8.5. Revenant au cas général, nous allons exprimer les nombres $\xi_G(g, \tau)$ à l'aide des fonctions de Plancherel de groupes réductifs associés à certaines sous-algèbres coisotropes de type unipotent relativement à g, parmi lesquelles se trouve $\mathfrak{b}_g$.

Définition 8.5.1. Soit $g \in \mathfrak{g}^*$. Une sous-algèbre coisotrope relativement à g est dite acceptable si elle est de type unipotent et si la dimension de ses facteurs réductifs est maximale parmi celles des éléments de $Cosu(g)$.

On note $Cosu_1(g)$ le sous-ensemble de $Cosu(g)$ constitué des sous-algèbres coisotropes acceptables. Il résulte du numéro 20 et de la démonstration de [9, Proposition 28] que $\mathfrak{b}_g$ est un élément de $Cosu_1(g)$ et qu'il existe une forme linéaire g_1 de type unipotent et u-équivalente à g telle que $\mathfrak{b}_g = \mathfrak{b}_{g_1}$. On en déduit que si $\mathfrak{b}$ est un élément de $Cosu_1(g)$, la dimension de ses facteurs réductifs est égale à celle des facteurs réductifs de $\mathfrak{g}(g_1)$, où g_1 est une forme de type unipotent u-équivalente à g. Remarquons aussi que si g est une forme de type unipotent, $Cosu_1(g) = Cosu(g)$.

Proposition 8.5.1. *Soit $g \in \mathfrak{g}_r^*$ et $\mathfrak{b}$ un élément de $Cosu_1(g)$. On pose $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_g$ et, avec les notations du numéro* 6.9*, $g = \lambda + g_1$ où $\lambda \in \mathfrak{j}^*$ et $g_1 \in (\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1})^*$. Alors, $\mathfrak{b}$ est un élément de $Cosu(g_1)$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{r}$ un facteur réductif de $\mathfrak{b}$ stabilisant la restriction u de g à ${}^u\mathfrak{b}$ et contenant $\mathfrak{j}$. Alors ${}^u\mathfrak{b}$ est orthogonal à $\mathfrak{r}$ pour la forme bilinéaire symétrique $\kappa(X, Y) = \operatorname{Tr} XY$ et on a les décompositions en somme directe orthogonale pour κ

$$\mathfrak{r} = [\mathfrak{j}, \mathfrak{r}] \oplus \mathfrak{j}, \qquad {}^u\mathfrak{b} = \bigl[\mathfrak{j}, {}^u\mathfrak{b}\bigr] \oplus {}^u\mathfrak{b}^{\mathfrak{j}}, \quad \mathfrak{b}^{\mathfrak{j}} = \mathfrak{j} \oplus {}^u\mathfrak{b}^{\mathfrak{j}}.$$

On en déduit facilement que $g_{1|{}^u\mathfrak{b}} = g|_{{}^u\mathfrak{b}} = u$ et $g_{1|\mathfrak{r}} = 0$. Désignant par b (respectivement b_1) la restriction de g (respectivement g_1) à $\mathfrak{b}$, on voit alors que

$$\mathfrak{b}(b) = \mathfrak{j} \oplus \bigl({}^u\mathfrak{b}\bigr)(u), \tag{8.7}$$

$$\mathfrak{b}(b_1) = \mathfrak{r} \oplus \bigl({}^u\mathfrak{b}\bigr)(u). \tag{8.8}$$

Comme $({}^u\mathfrak{b})(u)$ est clairement égal à ${}^u(\mathfrak{b}(u))$, on écrira simplement ${}^u\mathfrak{b}(u)$.

Cela étant, comme ${}^u\mathfrak{b}$ est orthogonal à $\mathfrak{r}$ pour la forme κ, on peut trouver un supplémentaire $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$ qui est à la fois $\mathfrak{r}$-invariant et contenu dans l'orthogonal de $\mathfrak{r}$ pour cette même forme. Mais alors, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{j}} \oplus [\mathfrak{j}, \mathfrak{m}]$, avec $\mathfrak{m}^{\mathfrak{j}} \subset \mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1}$. Il s'ensuit que g et g_1 ont même restriction à $\mathfrak{m}$. En particulier, ils s'annulent tous deux sur $[\mathfrak{j}, \mathfrak{m}]$.

Or, $\mathfrak{b}$ vérifie la condition de Pukanszky relativement à g. Cela équivaut à ce que pour tout $h \in \mathfrak{b}^\perp$ on ait $\mathfrak{b}(b).(g+h) = \mathfrak{b}^\perp$. Comme g est $\mathfrak{j}$-invariante, en prenant la composante $\mathfrak{j}$-invariante dans l'égalité précédente, on trouve que $(\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}} \cap \mathfrak{b}(b)).(g+h) = \mathfrak{b}^\perp \cap \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$, pour tout $h \in \mathfrak{b}^\perp \cap \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$. Mais compte tenu de l'égalité (8.7), cette dernière relation équivaut à $(\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}} \cap {}^u\mathfrak{b}(u)).(g+h) = \mathfrak{b}^\perp \cap \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$, pour tout $h \in \mathfrak{b}^\perp \cap \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$. Cela entraîne que l'espace affine $g + \mathfrak{b}^\perp \cap \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$ est une orbite du centralisateur de $\mathfrak{j}$ dans le sous-groupe unipotent ${}^uB(u)$ d'algèbre de Lie ${}^u\mathfrak{b}(u)$. Par suite, il existe $y \in {}^uB(u) \cap Z_G(\mathfrak{j})$ tel que $y.g|_{\mathfrak{m}^{\mathfrak{j}}} = 0$ et donc $y.g|_{\mathfrak{m}} = 0$. Cependant, il résulte de la relation (6.11) que $Z_G(\mathfrak{j})$ opère trivialement sur $\mathfrak{j}^*$. On a donc $y.g = \lambda + y.g_1$ et l'on voit que, quitte à changer $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{m}$ en respectivement $\operatorname{Ad} y^{-1}(\mathfrak{r})$ et $\operatorname{Ad} y^{-1}(\mathfrak{m})$, on peut supposer que g et g_1 s'annulent sur $\mathfrak{m}$. On déduit immédiatement de cette dernière propriété de g_1, que $\mathfrak{r}$ est contenu dans $\mathfrak{g}(g_1)$. Comme $\mathfrak{b}$ est acceptable $\mathfrak{r}$ a la dimension d'un facteur réductif de $\mathfrak{g}(g_1)$, de sorte que c'en est un.

Par ailleurs, d'après [20, numéro 1, Lemme 27], on a $\mathfrak{g}(g) = \mathfrak{j} \oplus {}^u(\mathfrak{g}(g_1))$. Cela étant, $\mathfrak{b}$ est coisotrope relativement à g, si bien que l'on a $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{g}(g) \subset \mathfrak{b}(b)$. Compte tenu de la relation (8.7), on déduit de ces considérations et des précédentes que l'on a

$$ {}^u\big(\mathfrak{g}(g_1)\big) = \big({}^u\mathfrak{b}\big)(g) \tag{8.9}$$

$$ \mathfrak{g}(g_1) = \mathfrak{r} \oplus \big({}^u\mathfrak{b}\big)(g). \tag{8.10}$$

Il résulte aussi du Lemme 10, du fait que $\mathfrak{b}$ est coisotrope relativement à g et de la relation (8.7) que l'on a ${}^u\mathfrak{b}(u).g = \mathfrak{b}^\perp$, si bien que $\dim \mathfrak{b}^\perp = \dim {}^u\mathfrak{b}(u) - \dim({}^u\mathfrak{b})(g)$.

Cependant, il suit de (8.9) et (8.10) que $({}^u\mathfrak{b})(g_1) = ({}^u\mathfrak{b})(g)$. Or, la formule (8.8) montre que ${}^u\mathfrak{b}(u).g_1 \subset \mathfrak{b}(b_1).g_1$, si bien que l'on a $\dim \mathfrak{b}(b_1).g_1 \geqslant \dim {}^u\mathfrak{b}(u) - \dim({}^u\mathfrak{b})(g_1) = \dim {}^u\mathfrak{b}(u) - \dim {}^u(\mathfrak{b})(g) = \dim \mathfrak{b}^\perp$. Le Lemme 10 montre alors que $\mathfrak{b}$ est bien coisotrope relativement à g_1. Mais, on a vu que u est également la restriction de g_1 à ${}^u\mathfrak{b}$, de sorte que $\mathfrak{b}$ est bien de type unipotent relativement à g_1. $\square$

8.6. Soit $g \in \mathfrak{g}^*_r$, $\mathfrak{b}$ un élément $G(g)$-invariant de $Cosu_1(g)$ et $B_{\mathfrak{b}}$ le sous-groupe induisant associé à $\mathfrak{b}$, que l'on note plus simplement B (voir la Section 5). On note $u_{\mathfrak{b}}$ ou plus simplement u la restriction de g à ${}^u\mathfrak{b}$ et on choisit un facteur réductif $R_{\mathfrak{b}}$ de B contenant un facteur réductif de $G(g)$ et stabilisant u. Alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{r}_{\mathfrak{b}}$ de $R_{\mathfrak{b}}$ contient $\mathfrak{j}_g$. Enfin, soit $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{b}}$ l'adhérence de Zariski de $j(R_{\mathfrak{b}})$ dans $\boldsymbol{G}$, $\widetilde{R}_{\mathfrak{b}}$ le revêtement universel de la composante neutre $(R_{\mathfrak{b}})_0$ de $R_{\mathfrak{b}}$, $p_{\mathfrak{b}} : \widetilde{R}_{\mathfrak{b}} \to (R_{\mathfrak{b}})_0$ la projection naturelle, $j_{\mathfrak{b}} = j \circ p_{\mathfrak{b}}$, $\Gamma_{\mathfrak{b}} = p_{\mathfrak{b}}^{-1}(\Gamma \cap (R_{\mathfrak{b}})_0)$ et $\widetilde{J}_{g,\mathfrak{b}}$ l'image inverse de J_g dans $\widetilde{R}_{\mathfrak{b}}$, de sorte que $(\widetilde{R}_{\mathfrak{b}}, j_{\mathfrak{b}}, (\boldsymbol{R}_{\mathfrak{b}})_0)$ est un groupe réductif presque algébrique simplement connexe et $\Gamma_{\mathfrak{b}}$ est un sous-groupe d'indice fini de $\ker j_{\mathfrak{b}}$.

On considère l'extension métaplectique $R^u_{\mathfrak{b}}$ de $R_{\mathfrak{b}}$ ainsi que la fonction δ^u sur cette dernière. Soit $p^u_{\mathfrak{b}} : R^u_{\mathfrak{b}} \to R_{\mathfrak{b}}$ la projection canonique, $j^u_{\mathfrak{b}} = j \circ p^u_{\mathfrak{b}}$ et $\Gamma^u_{\mathfrak{b}} = (p^u_{\mathfrak{b}})^{-1}(\Gamma \cap R_{\mathfrak{b}})$. Alors $(R^u_{\mathfrak{b}}, j^u_{\mathfrak{b}}, \boldsymbol{R}_{\mathfrak{b}})$ est un groupe réductif presque algébrique et $\Gamma^u_{\mathfrak{b}}$ est un sous-groupe d'indice fini de $\ker j^u_{\mathfrak{b}}$. Comme $\widetilde{R}_{\mathfrak{b}}$ est simplement connexe, il existe un morphisme canonique $\nu_{\mathfrak{b}} : \widetilde{R}_{\mathfrak{b}} \to R^u_{\mathfrak{b}}$, tandis que le morphisme $p_{\mathfrak{b}}$ se relève de manière unique en un morphisme $\tilde{p}_{\mathfrak{b}}$ de $\widetilde{R}_{\mathfrak{b}}$ dans le revêtement métalinéaire $\widetilde{G}$ de G.

Comme la restriction de δ^u à $\Gamma_{\mathfrak{b}}^u$ est un caractère, on définit un caractère $\chi_{\mathfrak{b}}^u$ de $\Gamma_{\mathfrak{b}}^u$ en posant :

$$\chi_{\mathfrak{b}}^u(\gamma) = \chi \circ p_{\mathfrak{b}}^u(\gamma)\delta^u(\gamma), \quad \gamma \in \Gamma_{\mathfrak{b}}^u;$$

puis un caractère $\chi_{\mathfrak{b}}$ de $\Gamma_{\mathfrak{b}}$ par la formule $\chi_{\mathfrak{b}} = \chi_{\mathfrak{b}}^u \circ \nu_{\mathfrak{b}}$.

Lorsque $\mathfrak{b}$ est la sous-algèbre induisante canonique $\mathfrak{b}_g$, conformément à celles introduites dans le numéro 7.4, on remplacera dans les notations ci-dessus l'indice ou l'exposant $\mathfrak{b}$ par g.

Supposons maintenant que $g \in \mathfrak{g}_{G,\chi}^*$ et désignons par λ la restriction de g à $\mathfrak{j}_g$, que l'on peut considérer comme un élément de $\mathfrak{r}_{\mathfrak{b}}^*$. On a alors le résultat suivant annoncé dans [10, IV.3, formule (27)] et dont la démonstration s'inspire de [9, III.20, p. 198] :

Lemme 30. *Le groupe $R_{\mathfrak{b}}(\lambda)$ est un facteur réductif de $G(g)$. De plus, $\mathfrak{j}_g$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{r}_{\mathfrak{b}}$, λ est un élément de $(\mathfrak{r}_{\mathfrak{b}}^*)_{R_{\mathfrak{b}}^u,\chi_{\mathfrak{b}}^u} = (\mathfrak{r}_{\mathfrak{b}}^*)_{\widetilde{R}_{\mathfrak{b}},\chi_{\mathfrak{b}}}$ et, étant donné $\tau \in X_{G,\chi}(g)$, il existe un unique élément $\tau^{R_{\mathfrak{b}}^u} \in X_{R_{\mathfrak{b}}^u,\chi_{\mathfrak{b}}^u}(\lambda)$ tel que, pour tout $x \in R_{\mathfrak{b}}^u(\lambda)$*

$$\delta^\lambda \tau^{R_{\mathfrak{b}}^u}(x)\delta^u(x) = \delta^g \tau\big(p_{\mathfrak{b}}^u(x)\big). \tag{8.11}$$

Enfin, l'application $\tau \mapsto \tau^{R_{\mathfrak{b}}^u}$ est une bijection de $X_{G,\chi}(g)$ sur $X_{R_{\mathfrak{b}}^u,\chi_{\mathfrak{b}}^u}(\lambda)$.

Démonstration. Pour simplifier les notations, au cours de cette démonstration on pose $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{b}}$, $R = R_{\mathfrak{b}}$, $R^u = R_{\mathfrak{b}}^u$ $\chi^u = \chi_{\mathfrak{b}}^u$ et $\tilde{\chi} = \chi_{\mathfrak{b}}$.

Soit b la restriction de g à $\mathfrak{b}$. Alors, d'après la démonstration de la Proposition 8.5.1, on a $\mathfrak{b}(b) = \mathfrak{j}_g \oplus {}^u\mathfrak{b}(u)$ et, par suite,

$${}^u\big(\mathfrak{b}(b)\big) = {}^u\mathfrak{b}(u). \tag{8.12}$$

Il résulte alors du Lemme 11 que l'on a $\mathfrak{b}^\perp \subset {}^u\mathfrak{b}.g$. Ceci montre que l'orthogonal $({}^u\mathfrak{b})^g$ de ${}^u\mathfrak{b}$ pour β_g est contenu dans $\mathfrak{b}$. Il vient alors

$$\big({}^u\mathfrak{b}\big)^g = \mathfrak{b}(u) = \mathfrak{r} \oplus {}^u\mathfrak{b}(u). \tag{8.13}$$

D'autre part, si S est un facteur réductif de $G(g)$ contenu dans R, on a $S \subset R(\lambda)$. De plus, il résulte de (8.12) que l'on a $B(b) \subset B(u) = R^u B(u)$, car ${}^u(B(b)) = {}^u B(u)$, d'où résulte que $B(b) = R(\lambda)^u B(u)$ et que $R(\lambda)$ est un facteur réductif de $B(b)$. D'après le Lemme 11, on a $B(b).g = {}^u B(u).g = g + \mathfrak{b}^\perp$. Par suite, si $x \in R(\lambda)$, il existe $y \in {}^u B(u)$ tel que $yx \in G(g)$. Il s'ensuit que, si p désigne la projection canonique de $B(b)$ sur $B(b)/{}^u(B(b))$, l'on a $p(G(g)) = p(R(\lambda)) = B(b)/{}^u(B(b))$. Ceci entraîne que $p({}^u(G(g)))$ est un sous-groupe invariant unipotent, donc trivial, du groupe réductif $B(b)/{}^u(B(b))$ et, par suite, que $p(S) = p(R(\lambda))$ de sorte que $S = R(\lambda)$. D'où la première partie du lemme. Par ailleurs, le fait que λ soit un élément de $(\mathfrak{r}^*)_{R^u,\chi^u} = (\mathfrak{r}^*)_{\widetilde{R},\tilde{\chi}}$ est immédiat.

Ainsi, le groupe $R(\lambda)$ est un facteur réductif de $G(g)$ et il stabilise ${}^u\mathfrak{b}$. Compte tenu de la relation (8.13), le Lemme 3 appliqué avec $V = \mathfrak{g}$, $\beta = \beta_g$ et $U = {}^u\mathfrak{b}$ montre alors que l'application $(x, x') \mapsto \delta^g(x)\delta^u(x')^{-1}\delta^\lambda(x')^{-1}$ est un caractère du produit fibré $R(\lambda)^g \times_{R(\lambda)} (R^u(\lambda))^\lambda$. Ceci montre que la formule (8.11) définit bien une représentation τ^{R^u} de $(R^u(\lambda))^\lambda$.

Le reste du lemme est une conséquence du Lemme 3, du fait que $R(\lambda)$ est un facteur réductif de $G(g)$ et des définitions de $X_{G,\chi}(g)$ et $X_{R^u,\chi^u}(\lambda)$. $\square$

8.7. On reprend les notations du numéro précédent. Le résultat suivant est annoncé dans [10] à la fin de la Section V.4 :

Proposition 8.7.1. *On se fixe $g \in \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$ et $\tau \in X_{G,\chi}(g)$. On choisit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre coisotrope acceptable relativement à g, $G(g)$-invariante, et un facteur réductif $R_\mathfrak{b}$ du sous-groupe induisant associé, contenant un facteur réductif de $G(g)$ et stabilisant la restriction u de g à ${}^u\mathfrak{b}$. On note λ la restriction de g à $\mathfrak{j}_g$ vue comme un élément de $\mathfrak{r}_\mathfrak{b}^{*\mathfrak{j}_g}$. Alors, le nombre*

$$\xi_{R^u_\mathfrak{b}}\big(\lambda, \tau^{R^u_\mathfrak{b}}\big) \tag{8.14}$$

est indépendant des choix faits.

Démonstration. Soit S un facteur réductif de $G(g)$ et B le sous-groupe induisant associé à $\mathfrak{b}$. Deux facteurs réductifs de B stabilisant u et contenant S sont conjugués par un élément du centralisateur de S dans $({}^uB)(u)$, comme on le voit par les mêmes arguments que ceux développés au début de la démonstration de [20, 2, Proposition 22] dans laquelle est traité le cas où l'enveloppe algébrique de $j(S)$ est un tore. Alors, comme les fonctions de Plancherel des groupes réductifs satisfont la relation (8.2), il est clair que le nombre (8.14) ne dépend pas du facteur réductif $R_\mathfrak{b}$ de B choisi.

Comme dans l'énoncé de la Proposition 8.5.1, posons $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_g$ et $g = \lambda + g_1$ avec $\lambda \in \mathfrak{j}^*$ et $g_1 \in (\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1})^*$. D'après cette proposition, $\mathfrak{b}$ est un élément de $Cosu(g_1)$. D'autre part, comme $G(g)$ est contenu dans $N_G(\mathfrak{j})$, il l'est également dans $G(g_1)$. On en déduit que $B(g_1) = G(g)G(g_1)_0$ et donc que les facteurs réductifs de $B(g_1)$ sont des facteurs réductifs de B. Ainsi, on peut supposer que $S \subset R_\mathfrak{b} \subset B(g_1)$. Mais, $G(g)G(g_1)_0$ étant inclus dans B_g, $R_\mathfrak{b}$ est aussi un facteur réductif de B_g stabilisant g_1. Cependant, pour tout $\mathfrak{b} \in Cosu_1(g)$, g et g_1 ont même restriction à ${}^u\mathfrak{b}$ (voir la démonstration de la Proposition 8.5.1), si bien que $R_\mathfrak{b}$ stabilise aussi la restriction de g à ${}^u\mathfrak{b}$.

Soit donc R_g un facteur réductif de B_g tel que $S \subset R_\mathfrak{b} \subset B(g_1)$. On se ramène alors à montrer que $\xi_{R^u_g}(\lambda, \tau^{R^u_g})$ est indépendant du choix de la sous-algèbre coisotrope $\mathfrak{b} \in Cosu_1(g)$, $G(g)$-invariante et dont le sous-groupe induisant associé contient R_g.

Avec les notations des numéros 7.4 et 8.4, mais u désignant la restriction de g à ${}^u\mathfrak{b}$, considérons le morphisme $\tilde{\phi}_\lambda : \widetilde{J}_g \to (R^u_g(\lambda))^\lambda$ qui relève la restriction à $\widetilde{J}_g$ du morphisme canonique $\nu_\mathfrak{b} : \widetilde{R}_g \to R^u_g$. Mais alors, d'après la formule (8.4), l'expression $\xi_{R^u_g}(\lambda, \tau^{R^u_g})$ ne dépend que de la représentation $\tau^{R^u_g} \circ \tilde{\phi}_\lambda$ de $\widetilde{J}_g$. Cependant, il résulte de la formule (8.11) définissant $\tau^{R^u_g}$ que l'on a

$$\delta^g \circ \phi_g\big(\tilde{p}_g(x)\big)\tau \circ \phi_g\big(\tilde{p}_g(x)\big) = \delta^\lambda \circ \tilde{\phi}_\lambda(x)\delta^u \circ \nu_\mathfrak{b}(x)\tau^{R^u_g} \circ \tilde{\phi}_\lambda(x), \quad x \in \widetilde{J}_g. \tag{8.15}$$

La proposition est alors conséquence du lemme qui suit. □

Reprenant les notations précédentes, on se donne $g \in \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$, $\mathfrak{b} \in Cosu_1(g)$ qui est $G(g)$-invariante, $R_\mathfrak{b}$ un facteur réductif du sous-groupe induisant B d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ associé à g, qui stabilise la restriction u de g à ${}^u\mathfrak{b}$ et qui contient un facteur réductif de $G(g)$, et on désigne par λ la restriction de g à $\mathfrak{j}_g$ vue comme une forme linéaire sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{r}_\mathfrak{b}$ de $R_\mathfrak{b}$. Remarquons que $\tilde{p}_\mathfrak{b}(\widetilde{J}_{g,\mathfrak{b}})$ est contenu dans $p_G^{-1}(J_g)$. On a alors le résultat suivant qui généralise le Lemme 23 ainsi que [21, Lemme 4.8] :

Lemme 31. *Pour tout élément x de $\widetilde{J}_{g,\mathfrak{b}}$, on a*

$$\delta^g \circ \phi_g\big(\tilde{p}_{\mathfrak{b}}(x)\big) = \delta^\lambda \circ \tilde{\phi}_\lambda(x)\delta^u \circ \nu_{\mathfrak{b}}(x). \tag{8.16}$$

Démonstration. Posons $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_g$ et, reprenant les notations du numéro 6.9, écrivons $g = \lambda + g_1$ avec $\lambda \in \mathfrak{j}^*$ et $g_1 \in (\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1})^*$. Raisonnant alors comme au début de la démonstration de la Proposition 8.7.1, on se ramène à démontrer le lemme lorsque $R_{\mathfrak{b}}$ est un facteur réductif commun à B et B_g, de sorte que l'on a $R_{\mathfrak{b}} = R_g$ et $\widetilde{J}_{g,\mathfrak{b}} = \widetilde{J}_g \subset \widetilde{R}_{\mathfrak{b}} = \widetilde{R}_g$ et $\tilde{p}_{\mathfrak{b}} = \tilde{p}_g$.

Dans ces conditions et d'après [20, 1, Lemmes 27 et 28], on a $\mathfrak{g}(g_1) = \mathfrak{r}_g \oplus {}^u(\mathfrak{g}(g))$, $\mathfrak{g}(g) = \mathfrak{j} \oplus {}^u(\mathfrak{g}(g))$ si bien que la forme symplectique β_{g_1} induit une dualité $\mathfrak{r}_g$-invariante entre $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}(u)/\mathfrak{g}(g_1)$ qui, d'après (8.7) et (8.8), s'identifie à $({}^u\mathfrak{b})(u)/{}^u(\mathfrak{g}(g))$.

Comme ${}^u\mathfrak{b}$ est orthogonal à $\mathfrak{r}_g$ pour κ, on peut choisir des sous-espaces $\mathfrak{r}_g$-invariants $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{w}$ de $\mathfrak{g}$ tels que

$${}^u\mathfrak{b} = \mathfrak{m} \oplus ({}^u\mathfrak{b})(u), \quad \big({}^u\mathfrak{b}\big)(u) = \mathfrak{p} \oplus {}^u\big(\mathfrak{g}(g)\big), \qquad \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{p} \subset \mathfrak{w}, \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{g}(g_1),$$

avec $\mathfrak{w}$ contenu dans l'orthogonal de $\mathfrak{r}_g$ pour cette forme. On voit donc que $\mathfrak{w} = [\mathfrak{j}, \mathfrak{w}] \oplus \mathfrak{w}^{\mathfrak{j}}$ et $\mathfrak{w}^{\mathfrak{j}} \subset \mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1}$, de sorte que g et g_1 ont même restriction à $\mathfrak{w}$.

Il est clair que la restriction de β_{g_1} à $\mathfrak{w}$ et à $\mathfrak{m}$ est non dégénérée. Soit $\mathfrak{m}^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{g}$ relativement à β_{g_1}. Alors on a $\mathfrak{p} = \mathfrak{w} \cap \mathfrak{m}^\perp \cap {}^u\mathfrak{b} = \mathfrak{w} \cap ({}^u\mathfrak{b})(u)$ et c'est un sous-espace de $\mathfrak{w}$ totalement isotrope pour β_{g_1}. Comme, on a $\mathfrak{b} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}(g_1)$ et comme les espaces $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ et $({}^u\mathfrak{b})(u)/{}^u(\mathfrak{g}(g))$, étant mis en dualité par β_{g_1}, sont de même dimension, il est alors clair que $\mathfrak{p}$ est un sous-espace lagrangien de l'espace symplectique $\mathfrak{w} \cap \mathfrak{m}^\perp$.

Il convient également de noter que, puisque $\mathfrak{w}$ est $\mathfrak{r}_g$-invariant et g et g_1 ont même restriction à ce sous-espace, c'est un supplémentaire orthogonal de $\mathfrak{g}(g_1)$ pour β_g.

Remarquons enfin que, puisque l'action de $\mathfrak{j}$ dans ${}^u(\mathfrak{g}(g)) = {}^u(\mathfrak{g}(g_1))$ est triviale, il en est de même de celle de $\mathfrak{r}_g$. En particulier, si on pose $\widetilde{\mathrm{Ad}}_g = \widetilde{\mathrm{Ad}}_G \circ \tilde{p}_g$, on voit que $\widetilde{\mathrm{Ad}}_g$ applique $\widetilde{R}_g$ dans le groupe $\mathrm{ML}(\mathfrak{w} \oplus \mathfrak{r}_g)$ identifié au sous-groupe de $\mathrm{ML}(\mathfrak{g})$ constitué des éléments laissant invariant $\mathfrak{w} \oplus \mathfrak{r}_g$ et agissant trivialement dans ${}^u(\mathfrak{g}(g))$.

Comme $\widetilde{R}_g$ est simplement connexe, son action dans le sous-espace $\mathfrak{w}$ se relève en un unique morphisme $\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{w}} : \widetilde{R}_g \to \mathrm{ML}(\mathfrak{w})$. Désignons de même par $\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\widetilde{R}_g}$ le relèvement métalinéaire de la propre action adjointe de $\widetilde{R}_g$. Identifions enfin $\mathrm{ML}(\mathfrak{w})$ (respectivement $\mathrm{ML}(\mathfrak{r}_g)$) au sous-groupe de $\mathrm{ML}(\mathfrak{g})$ constitué des éléments laissant invariant $\mathfrak{w}$ (respectivement $\mathfrak{r}_g$) et agissant trivialement dans $\mathfrak{g}(g_1)$ (respectivement $\mathfrak{w} \oplus^u (\mathfrak{g}(g))$). Alors, compte tenu de ce qui précède, on peut écrire

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_g(x) = \widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{w}}(x)\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\widetilde{R}_g}(x), \quad x \in \widetilde{R}_g.$$

Comme les espaces $\mathfrak{w}$ et $\mathfrak{r}_g$ sont orthogonaux pour β_g, et comme l'action des éléments de $\widetilde{J}_g$ dans ces espaces est symplectique, on déduit de cette relation que

$$\delta^g \circ \phi_g\big(\tilde{p}_g(x)\big) = \delta^{\beta_{g|\mathfrak{w}}}\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{w}}(x)\big)\delta^\lambda\big(\tilde{\phi}_\lambda(x)\big), \quad x \in \widetilde{J}_g. \tag{8.17}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $g_t = g_1 + (1-t)\lambda$. Alors, d'après [20, 1, Lemme 28], les formes bilinéaires alternées $\beta_{g_t|\mathfrak{w}}$, $t \in \mathbb{R}$ sont non dégénérées et $\widetilde{J}_g$-invariantes. Par suite, il résulte du Lemme 7 que l'on a

$$\delta^{\beta_{g|\mathfrak{w}}}\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{w}}(x)\big) = \delta^{\beta_{g_1|\mathfrak{w}}}\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{w}}(x)\big), \quad x \in \widetilde{J}_g. \tag{8.18}$$

Soit $\mathfrak{w}_0 = \mathfrak{w} \cap \mathfrak{m}^{\perp}$. C'est, comme $\mathfrak{m}$, un sous-espace $\widetilde{R}_g$-invariant de $\mathfrak{w}$ et on a la décomposition en somme directe orthogonale pour β_{g_1}, $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_0 \oplus \mathfrak{m}$. Désignons alors par $\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{m}}$ (respectivement $\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{w}_0}$) le relèvement métalinéaire de l'action de $\widetilde{R}_g$ dans $\mathfrak{m}$ (respectivement $\mathfrak{w}_0$). Comme l'action de $\widetilde{R}_g$ dans $\mathfrak{w}$ est symplectique, on a

$$\delta^{\beta_{g_1|\mathfrak{w}}}\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{w}}(x)\big) = \delta^{\beta_{g_1|\mathfrak{w}_\circ}}\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{w}_\circ}(x)\big)\delta^{\beta_{g_1|\mathfrak{m}}}\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{m}}(x)\big), \quad x \in \widetilde{R}_g.$$

Tenant compte de ce que les formes symplectiques β_g et β_{g_1} ont même restriction à $\mathfrak{m}$, cette dernière relation s'écrit :

$$\delta^{\beta_{g_1|\mathfrak{w}}}\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{w}}(x)\big) = \delta^{\beta_{g_1|\mathfrak{w}_\circ}}\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{w}_\circ}(x)\big)\delta^{\beta_{g|\mathfrak{m}}}\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{m}}(x)\big), \quad x \in \widetilde{R}_g. \tag{8.19}$$

Cependant, $\mathfrak{w}_0$ admet le lagrangien $\mathfrak{p}$ pour β_{g_1} qui est $\widetilde{R}_g$-invariant. On en déduit facilement que l'on a $\delta^{\beta_{g_1|\mathfrak{w}_\circ}}(\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{w}_\circ}(x)) = 1$, $x \in \widetilde{R}_g$. Appliquant ce résultat à l'élément x de $\widetilde{J}_g$ et le reportant dans les Éqs. (8.19), (8.17) et (8.18), on en déduit finalement l'égalité

$$\delta^g \circ \phi_g\big(\tilde{p}_g(x)\big) = \delta^{\beta_{g|\mathfrak{m}}}\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{m}}(x)\big)\delta^{\lambda}\big(\tilde{\phi}_\lambda(x)\big) = \delta^u \circ \nu_g(x)\delta^{\lambda}\big(\tilde{\phi}_\lambda(x)\big). \quad \square$$

8.8. Compte tenu de la Proposition 8.7.1 et avec ses notations, la définition suivante est justifiée :

Définition 8.8.1. On définit la fonction de Plancherel ξ_G en décidant que, pour $(g,\tau) \in X_{G,\chi}$, on a :

$$\xi_G(g,\tau) = \xi_{R^u_{\mathfrak{b}}}\big(\lambda, \tau^{R^u_{\mathfrak{b}}}\big). \tag{8.20}$$

On voit aisément que les fonctions de Plancherel ξ_G satisfont encore dans le cas général les relations (8.2) et (8.3).

8.9. Maintenant, nous pouvons relier la fonction de Poisson–Plancherel $q_{G,\chi}$ et la fonction de Plancherel ξ_G. On reprend les notations des numéros 7.4 et 8.2.

Théorème 8.9.1. *Soit $s \in \widetilde{G}_{\mathrm{ell,bp}}$ et $g \in \mathscr{V} \cap \mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi}$. Alors, $p_G(s) \in J_g$ et on a :*

$$q_{G,\chi}(s,g) = \big[G(g):G(g)_0\varGamma\big]^{-1} \sum_{\tau \in X_{G,\chi}(g)} \dim\tau\, \xi_G(g,\tau)\, \mathrm{Tr}\big(\tau \circ \phi_g\big(s^{-1}\big)\big). \tag{8.21}$$

Avant de donner la démonstration de ce résultat, remarquons que si le groupe G satisfait aux hypothèses du numéro 4.7, la formule (8.21) s'applique directement aux éléments s de $G_{\mathrm{ell,bp}}$ et démontrer le théorème dans ce cas revient à démontrer cette formule pour $s \in G_{\mathrm{ell,bp}}$ et $g \in \mathscr{V} \cap \mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi}$.

Démonstration du Théorème 8.9.1. Nous allons montrer en premier lieu comment le cas où $(G, j, \boldsymbol{G})$ est réductif, connexe et simplement connexe se déduit du cas semi-simple, connexe et simplement connexe. Pour ce faire, nous avons besoin du résultat préliminaire suivant, énoncé dans le cas général :

Lemme 32. *Si le Théorème* 8.9.1 *est vrai pour le sous-groupe Γ de* $\ker j$*, il est vrai pour tout sous-groupe d'indice fini Γ' de Γ.*

Démonstration. Soit χ' un caractère de Γ' et $g \in \mathscr{V} \cap \mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi'}$. Il est immédiat que

$$X_{G,\chi'}(g) = \bigsqcup_{\substack{\chi \in \Gamma\hat{}, \, \chi|_{\Gamma'} = \chi', \\ \chi|_{\Gamma \cap (J_g)_0} = \eta_g}} X_{G,\chi}(g).$$

Reportant alors la formule (8.21) supposée vraie pour $q_{G,\chi}(s,g)$ dans la formule (7.22) du Lemme 26, on trouve

$$\begin{aligned} q_{G,\chi'}(s,g) &= \big[\Gamma \cap (J_g)_0 : \Gamma' \cap (J_g)_0\big][\Gamma : \Gamma']\big[G(g) : G(g)_0\Gamma\big]^{-1} \\ &\quad \times \sum_{\substack{\chi \in \Gamma\hat{}, \, \chi|_{\Gamma'} = \chi' \\ \chi|_{\Gamma \cap (J_g)_0} = \eta_g}} \sum_{\tau \in X_{G,\chi}(g)} \dim\tau \, \xi_G(g,\tau) \operatorname{Tr}\big(\tau \circ \phi_g\big(s^{-1}\big)\big) \\ &= \big[G(g) : G(g)_0\Gamma'\big]^{-1} \sum_{\tau \in X_{G,\chi'}(g)} \dim\tau \, \xi_G(g,\tau) \operatorname{Tr}\big(\tau \circ \phi_g\big(s^{-1}\big)\big), \end{aligned}$$

comme voulu. □

Maintenant nous supposons que $(G, j, \boldsymbol{G})$ est réductif, connexe et simplement connexe et on reprend les notations des numéros 7.5 et 7.6. Compte tenu du lemme précédent, on se ramène à montrer le résultat lorsque $(G, j, \boldsymbol{G})$ vérifie les hypothèses du numéro 7.6. Or, il résulte de la relation (7.15) que l'on a

$$q_{G,\chi}(s,g) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle g_{\mathrm{z}}, S_{\mathrm{z}}\rangle} q_{D,\chi_{\mathrm{d}}}(s_{\mathrm{d}}, g_{\mathrm{d}}), \quad g \in \mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi}.$$

Supposant alors la formule (8.21) établie pour le groupe semi-simple simplement connexe D, l'élément s_{d}, le caractère χ_{d} et la reportant dans la relation précédente, on trouve

$$\begin{aligned} q_{G,\chi}(s,g) &= \big[D(g_{\mathrm{d}}) : D(g_{\mathrm{d}})_0 \ker j_{\mathrm{d}}\big]^{-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle g_{\mathrm{z}}, S_{\mathrm{z}}\rangle} \sum_{\tau \in X_{D,\chi_{\mathrm{d}}}(g_{\mathrm{d}})} \dim\tau \, \xi_D(g_{\mathrm{d}},\tau) \\ &\quad \times \operatorname{Tr}\big(\tau \circ \phi_{g_{\mathrm{d}}}\big(s_{\mathrm{d}}^{-1}\big)\big), \quad g \in \mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi}. \end{aligned} \tag{8.22}$$

Soit donc $g \in \mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi}$. Si $\tau \in X_{D,\chi_{\mathrm{d}}}(g_{\mathrm{d}})$, on définit la représentation $\tau^{g_{\mathrm{z}}}$ de $G(g)^g$ (ou de $G(g)$, puisqu'on est dans le cas simplement connexe) en posant :

$$\tau^{g_{\mathrm{z}}}(x \exp S) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle g_{\mathrm{z}}, S\rangle} \tau(x), \quad x \in D(g_{\mathrm{d}})^{g_{\mathrm{d}}}, \ S \in \mathfrak{z}.$$

Alors, l'application $\tau \mapsto \tau^{g_{\mathrm{z}}}$ est une bijection de $X_{D,\chi_{\mathrm{d}}}(g_{\mathrm{d}})$ sur $X_{G,\chi}(g)$ et, pour $\tau \in X_{D,\chi_{\mathrm{d}}}(g_{\mathrm{d}})$, on a $\xi_D(g_{\mathrm{d}},\tau) = \xi_G(g,\tau^{g_{\mathrm{z}}})$. Enfin, il est clair que $[G(g) : G(g)_0 \ker j] = [D(g_{\mathrm{d}}) : D(g_{\mathrm{d}})_0 \ker j_{\mathrm{d}}]$. Compte tenu de ces remarques, on voit que la formule (8.22) n'est autre que la formule (8.21). Ceci achève de ramener le cas réductif simplement connexe au cas semi-simple simplement connexe.

8.10. On suppose que $(G, j, \boldsymbol{G})$ est semi-simple, connexe et simplement connexe. Alors, compte tenu de la première remarque suivant l'énoncé du théorème, le résultat est conséquence de [13, II, Section 3, Théorème 3, II, Section 10, formule (81), III, Section 1, Théorème 1] ainsi que du Lemme 32 et de la formule (8.23) du Lemme 33 ci-après.

On utilise les notations du numéro 8.3. Étant donné $g \in \mathfrak{g}_r^*$, on note $\mathfrak{t}_g$, la partie anisotrope de $\mathfrak{j}_g$, $\boldsymbol{T}_g$ le tore correspondant de $\boldsymbol{G}$ et $T_g = j_g^{-1}(\boldsymbol{T}_g)$. Alors, suivant [13], on considère le caractère ζ_g de T_g naturellement associé à g dont nous rappelons la définition. Tout d'abord, on peut supposer que $\boldsymbol{G}$ est simplement connexe.

Soit $\ell \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ un lagrangien pour β_g qui soit $\mathfrak{j}_{g\mathbb{C}}$-invariant. C'est un sous-espace $\mathfrak{j}_{g\mathbb{C}}$-invariant, contenant $\mathfrak{j}_{g\mathbb{C}}$ et tel que $\Delta_{\mathfrak{j}_{g\mathbb{C}},\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} = \Delta_{\mathfrak{j}_{g\mathbb{C}},\ell} \amalg -\Delta_{\mathfrak{j}_{g\mathbb{C}},\ell}$. Grâce à l'hypothèse de simple connexité sur $\boldsymbol{G}$, la forme linéaire $\rho_\ell = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{j}_{g\mathbb{C}},\ell}}$ est la différentielle d'un caractère ζ_ℓ bien déterminé de $\boldsymbol{J}_g$.

On note $\mathscr{L}_g$ l'ensemble des lagrangiens ℓ comme ci-dessus qui vérifient de plus les conditions suivantes :

(i) pour toute racine réelle $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{j}_{g\mathbb{C}},\ell}$, on a $g(H_\alpha) > 0$,
(ii) pour toute racine imaginaire pure $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{j}_{g\mathbb{C}},\ell}$, on a $\mathrm{i}g([X_\alpha, \overline{X_\alpha}]) > 0$, où $X_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha \setminus \{0\}$,
(iii) pour toute racine complexe $\alpha \in \Delta_{\mathfrak{j}_{g\mathbb{C}},\ell}$, on a $\bar{\alpha} \in \Delta_{\mathfrak{j}_{g\mathbb{C}},\ell}$.

On notera que les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes au fait que le lagrangien ℓ est positif pour β_g.

Alors, la restriction à T_g du caractère $\zeta_\ell \circ j_g$ est indépendante du choix de $\ell \in \mathscr{L}_g$. On la note ζ_g.

Lemme 33. *Soit $g \in \mathfrak{g}_r^*$. Avec les notations ci-dessus, on a*

$$\delta^g \circ \phi_g(x) = \zeta_g(x), x \in T_g. \tag{8.23}$$

Démonstration. Il est clair que les caractères $\delta^g \circ \phi_g$ et ζ_g de T_g ont même différentielle. Comme le groupe T_g est engendré par sa composante neutre et les γ_α, $\alpha \in \Phi_g$, il suffit de démontrer que les caractères $\delta^g \circ \phi_g$ et ζ_g prennent la même valeur en chacun de ces éléments. Pour simplifier, on pose $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_g$, $\Phi = \Phi_g$, $\Delta = \Delta_{\mathfrak{j}_{\mathbb{C}},\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ et $\Delta_E = \Delta_{\mathfrak{j}_{\mathbb{C}},E}$, pour tout sous-espace $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$-invariant E de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Si $\beta \in \Delta$, H_β désigne la coracine correspondante dans $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$.

Soit donc $\alpha \in \Phi_g$. On pose $W_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$ et $V = (\operatorname{Ad}\gamma_\alpha - 1)\mathfrak{g}$. Le sous-espace V est invariant sous l'action de $\mathfrak{j}$ ainsi que de $W_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$. De plus, $\Delta_{V_{\mathbb{C}}} = \{\beta \in \Delta\colon\ \beta(H_\alpha) \equiv 1 \bmod 2\}$, si bien que $\operatorname{Ad}\gamma_{\alpha|V} = -\mathrm{Id}$.

Cela dit, soit $c_\alpha = \exp -\mathrm{i}\frac{\pi}{4}(X_\alpha + X_{-\alpha}) \in \boldsymbol{G}$, l'élément de Cayley associé à α. Soit H, X, Y la base de Chevalley canonique de sl_2 :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et ψ_α le morphisme d'algèbres de Lie de sl_2 dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ tel que $\psi_\alpha(H) = H_\alpha$, $\psi_\alpha(X) = X_\alpha$ et $\psi_\alpha(Y) = X_{-\alpha}$, lequel se relève en un morphisme encore noté ψ_α de groupes de Lie complexes de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ dans $\boldsymbol{G}$. Avec ces notations, on a $c_\alpha = \psi_\alpha(\exp -\mathrm{i}(\pi/4)(X+Y))$ et $j(\gamma_\alpha) = \psi_\alpha(-\mathrm{Id})$. Ainsi c_α et $j(\gamma_\alpha)$ commutent, si bien que $\operatorname{Ad} c_\alpha(V_{\mathbb{C}}) = V_{\mathbb{C}}$.

D'autre part, $\mathrm{Ad}\, c_\alpha(\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{j}'_{\mathbb{C}}$, où $\mathfrak{j}' = \ker\alpha \oplus \mathbb{R}W_\alpha$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{g}(\gamma_\alpha)$, $\mathrm{Ad}\, c_{\alpha|\ker\alpha} = \mathrm{Id}$ et $\mathrm{Ad}\, c_\alpha.H_\alpha = \mathrm{i}W_\alpha$. Le sous-espace V est $\mathfrak{j}'$-invariant. On pose $\Delta' = \Delta_{\mathfrak{j}'_{\mathbb{C}},\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ et $\Delta'_E = \Delta_{\mathfrak{j}'_{\mathbb{C}},E}$, pour tout sous-espace $\mathfrak{j}'_{\mathbb{C}}$-invariant E de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. On a

$$\Delta' = \left\{c_\alpha\beta := \beta \circ \mathrm{Ad}\, c^{-1}_{\alpha|\mathfrak{j}'}\colon\ \beta \in \Delta\right\}$$

et plus généralement $\Delta'_{c_\alpha E} = c_\alpha \Delta_E$, pour tout sous-espace $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$-invariant $E \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Soit η une forme volume sur V. Posons $U = \ker(1 - \mathrm{Ad}\,\gamma_\alpha)$ et $s = \widetilde{\mathrm{Ad}}\,\gamma_\alpha$. On a $\mathfrak{g} = V \oplus U$, la somme directe étant orthogonale et V étant un sous-espace symplectique de $\mathfrak{g}$ pour la forme $\beta_{g'}$, $g' \in \mathfrak{g}(\gamma_\alpha)^*_{\mathrm{tr}}$. Comme $s_V = -\mathrm{Id}$, le Lemme 8 appliqué à V et à s, vu de manière canonique comme un élément de $\mathrm{ML}(V)$, montre alors que l'on a

$$\delta^g \circ \phi_g(\gamma_\alpha)\epsilon_\eta(\beta_{g|V}) = \delta^{g'} \circ \phi_{g'}(\gamma_\alpha)\epsilon_\eta(\beta_{g'|V}), \quad g' \in \mathfrak{g}(\gamma_\alpha)^*_{\mathrm{tr}}. \tag{8.24}$$

Maintenant, on se donne $g' \in \mathfrak{g}(\gamma_\alpha)^{*\mathfrak{j}'}_{\mathrm{tr}}$ ainsi que $\ell \in \mathscr{L}_g$ et $\ell' \in \mathscr{L}_{g'}$. Comme ℓ' est un lagrangien positif $\mathfrak{j}'_{\mathbb{C}}$-invariant pour $\beta_{g'}$, on a

$$\delta^{g'} \circ \phi_{g'}(\gamma_\alpha) = \mathrm{e}^{\pi\rho_{\ell'}(W_\alpha)}. \tag{8.25}$$

Cependant, $\mathrm{i}\beta(W_\alpha)$ est congru à 0 (respectivement 1) modulo 2, pour toute racine β dans $\Delta'_{U_{\mathbb{C}}}$ (respectivement $\Delta'_{V_{\mathbb{C}}}$), $c_\alpha\ell$ est un lagrangien $\mathfrak{j}'_{\mathbb{C}}$-invariant pour $\beta_{g'}$ et on a $\rho_\ell(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$. On déduit de ces considérations que, si q est le nombre de racines $\beta \in \Delta_{c_\alpha\ell\cap V_{\mathbb{C}}}$ telles que $-\beta \in \Delta'_{\ell'\cap V_{\mathbb{C}}}$, on a

$$\mathrm{e}^{\pi\rho_{\ell'}(W_\alpha)} = (-1)^q \mathrm{e}^{\pi\rho_{c_\alpha\ell}(W_\alpha)} = (-1)^q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\rho_\ell(H_\alpha)} = (-1)^q \zeta_g(\gamma_\alpha). \tag{8.26}$$

Il résulte alors des relations (8.24)–(8.26) que l'on a

$$\zeta_g(\gamma_\alpha) = \delta^g \circ \phi_g(\gamma_\alpha)\epsilon_\eta(\beta_{g|V})(-1)^q \epsilon_\eta(\beta_{g'|V}). \tag{8.27}$$

Il nous reste donc à montrer que $\epsilon_\eta(\beta_{g|V})(-1)^q\epsilon_\eta(\beta_{g'|V}) = 1$, soit encore que les formes volumes $\wedge^d \beta_{g|V}$ et $(-1)^q \wedge^d \beta_{g'|V}$, où $2d = \dim V$, définissent la même orientation sur V.

Pour simplifier, on pose $\ell_1 = \ell \cap V_{\mathbb{C}}$. Comme $\beta(H_\alpha) \equiv 1 \bmod 2$ pour tout $\beta \in \Delta_{V_{\mathbb{C}}}$, on voit que $\Delta_{V_{\mathbb{C}}}$ (respectivement $\Delta'_{V_{\mathbb{C}}}$) ne contient pas de racine imaginaire (respectivement réelle). Par suite, on a $\Delta_{\ell_1} = \Delta_{\ell_1,\mathrm{R}} \sqcup \Delta_{\ell_1,\mathrm{C}}$ et $\Delta'_{c_\alpha\ell_1} = \Delta'_{c_\alpha\ell_1,\mathrm{I}} \sqcup \Delta_{c_\alpha\ell_1,\mathrm{C}}$, l'indice R (respectivement I, C) désignant l'ensemble des racines réelles (respectivement imaginaires, complexes). De plus, on a les décompositions $\Delta_{\ell_1,\mathrm{C}} = \Delta_{\ell_1,\mathrm{C}_0} \sqcup \Delta_{\ell_1,\mathrm{C}_1}$ et $\Delta'_{c_\alpha\ell_1,\mathrm{C}} = \Delta'_{c_\alpha\ell_1,\mathrm{C}_0} \sqcup \Delta_{c_\alpha\ell_1,\mathrm{C}_1}$, avec

$$\Delta_{\ell_1,\mathrm{C}_0} = \left\{\beta \in \Delta_{\ell_1,\mathrm{C}}\colon\ s_\alpha\beta = -\bar\beta\right\}, \qquad \Delta'_{c_\alpha\ell_1,\mathrm{C}_0} = \left\{\beta \in \Delta'_{c_\alpha\ell_1,\mathrm{C}}\colon\ s_{\alpha'}\beta = \bar\beta\right\},$$

où on a posé $\alpha' = c_\alpha\alpha$ et où, d'une manière générale, s_α désigne la réflexion par rapport à la racine α.

Cela dit, pour tout $\beta \in \Delta_{V_{\mathbb{C}}}$, on a $c_\alpha s_\alpha\bar\beta = \overline{c_\alpha\beta}$ et $c_\alpha s_\alpha\beta = s_{\alpha'}c_\alpha\beta$. On note $\sim$ la relation d'équivalence induite sur $\Delta_{V_{\mathbb{C}}}$ (respectivement $\Delta'_{V_{\mathbb{C}}}$) par l'action du groupe $\{1, -1, \sigma, -\sigma, s_\alpha, -s_\alpha\}$ (respectivement $\{1, -1, \sigma, -\sigma, s_{\alpha'}, -s_{\alpha'}\}$), σ désignant la conjugaison, et on définit les fonctions ϵ_{ℓ_1} et $\epsilon_{c_\alpha\ell_1}$ sur respectivement $\Delta_{\ell_1,\mathrm{R}}$ et $\Delta'_{c_\alpha\ell_1,\mathrm{C}}$ en décidant que :

$$\epsilon_{\ell_1}(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } s_\alpha\beta \in \Delta_{\ell_1}, \\ -1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \beta \in \Delta_{\ell_1,\mathrm{R}},$$

$$\epsilon_{c_\alpha\ell_1}(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar\beta \in \Delta'_{c_\alpha\ell}, \\ -1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \beta \in \Delta'_{c_\alpha\ell_1,\mathrm{C}}.$$

Alors, on voit facilement que $\Delta'_{c_\alpha\ell_1,\mathrm{C}_0} = c_\alpha\Delta_{\ell_1,\mathrm{R}}$, $\Delta'_{c_\alpha\ell_1,\mathrm{I}} = c_\alpha\Delta_{\ell_1,\mathrm{C}_0}$ et $\Delta'_{c_\alpha\ell_1,\mathrm{C}_1} = c_\alpha\Delta_{\ell_1,\mathrm{C}_1}$. On déduit de ceci que $\Delta'_{c_\alpha\ell_1,\mathrm{I}}$ (respectivement $\Delta'_{c_\alpha\ell_1,\mathrm{C}}$) est invariant par la transformation $\beta \mapsto -s_{\alpha'}\beta$ (respectivement $\beta \mapsto s_{\alpha'}\bar\beta$). De plus, les fonctions ϵ_{ℓ_1} et $\epsilon_{c_\alpha\ell_1}$ sont constantes sur les classes d'équivalence dans leur domaine respectif pour la relation $\sim$ et l'on a $\epsilon_{c_\alpha\ell_1}(c_\alpha\beta) = \epsilon_{\ell_1}(\beta)$, $\beta \in \Delta_{\ell_1,\mathrm{R}}$.

Soit $\omega \in \wedge^{2d} V \setminus \{0\}$ (respectivement $\omega' \in \wedge^{2d} V \setminus \{0\}$) l'orientation définie sur V par $\wedge^d \beta_{g|V}$ (respectivement $(-1)^q \wedge^d \beta_{g'|V}$). On choisit les vecteurs radiciels $X_\beta \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\beta} \setminus \{0\}$ de sorte que $X_{\bar\beta} = \overline{X_\beta}$, $\beta \in \Delta_{V_{\mathbb{C}}}$, et $[X_\beta, X_{-\beta}] = H_\beta$, pour toute racine réelle $\beta \in \Delta_{V_{\mathbb{C}}}$. De plus, on pose $X_{c_\alpha\beta} = c_\alpha X_\beta$, $\beta \in \Delta_{V_{\mathbb{C}}}$.

Supposons un moment que $g \in \mathfrak{g}(\gamma_\alpha)^*_{\mathrm{tr}}$ soit quelconque. Alors, l'orientation ω est, indépendamment du choix des vecteurs radiciels X_β comme ci-dessus, le produit extérieur des :

- $X_\beta \wedge X_{-\beta}$, où β décrit les racines réelles de $\Delta_{V_{\mathbb{C}}}$ telles que $g([X_\beta, X_{-\beta}]) > 0$,
- $\mathrm{i}(X_\beta \wedge \overline{X_\beta})$, où β décrit les racines imaginaires de $\Delta_{V_{\mathbb{C}}}$ telles que $\mathrm{i}g([X_\beta, \overline{X_\beta}]) > 0$,
- $\mathrm{i}(X_\beta \wedge \overline{X_\beta}) \wedge \mathrm{i}(X_{-\beta} \wedge \overline{X_{-\beta}})$, où β décrit un ensemble de représentants des racines complexes de $\Delta_{V_{\mathbb{C}}}$ modulo l'action de $\{1, -1, \sigma, -\sigma\}$.

Revenant à la situation qui nous intéresse, on déduit de ceci que ω' est le produit extérieur des :

- $\mathrm{i}(X_\beta \wedge \overline{X_\beta})$, où β décrit les racines imaginaires de $\Delta'_{c_\alpha\ell_1}$,
- $\epsilon_{c_\alpha\ell_1}(\beta)\mathrm{i}(X_\beta \wedge \overline{X_\beta}) \wedge \mathrm{i}(X_{-\beta} \wedge \overline{X_{-\beta}})$, où β décrit un ensemble de représentants dans $\Delta_{c_\alpha\ell_1,\mathrm{C}}$ des racines complexes de $\Delta'_{V_{\mathbb{C}}}$ modulo l'action de $\{1, -1, \sigma, -\sigma\}$.

Il résulte des considérations précédentes que $\omega = \omega_{\mathrm{R}} \wedge \omega_{\mathrm{C}_0} \wedge \omega_{\mathrm{C}_1}$ et $\omega' = \omega'_{\mathrm{I}} \wedge \omega'_{\mathrm{C}_0} \wedge \omega'_{\mathrm{C}_1}$, où :

- ω_R est le produit des $\epsilon_{\ell_1}(\beta)X_\beta \wedge X_{-\beta} \wedge X_{s_\alpha\beta} \wedge X_{-s_\alpha\beta}$, pour $\beta \in \Delta_{\ell_1,\mathrm{R}}/\sim$,
- ω_{C_0} est le produit des $\mathrm{i}(X_\beta \wedge \overline{X_\beta}) \wedge \mathrm{i}(X_{-\beta} \wedge \overline{X_{-\beta}})$, pour $\beta \in \Delta_{\ell_1,\mathrm{C}_0}/\sim$,
- ω_{C_1} est le produit des $X_\beta \wedge X_{-\beta} \wedge \overline{X_\beta} \wedge \overline{X_{-\beta}} \wedge X_{s_\alpha\bar\beta} \wedge X_{-s_\alpha\bar\beta} \wedge \overline{X_{s_\alpha\bar\beta}} \wedge \overline{X_{-s_\alpha\bar\beta}}$, pour $\beta \in \Delta_{\ell_1,\mathrm{C}_1}/\sim$,
- ω'_I est le produit des $\mathrm{i}(c_\alpha X_\beta \wedge \overline{c_\alpha X_\beta}) \wedge \mathrm{i}(\overline{c_\alpha X_{-\bar\beta}} \wedge c_\alpha X_{-\bar\beta})$, pour $\beta \in \Delta_{\ell_1,\mathrm{C}_0}/\sim$,
- ω'_{C_0} est le produit des $\epsilon_{\ell_1}(\beta)c_\alpha X_\beta \wedge c_\alpha X_{-\beta} \wedge \overline{c_\alpha X_\beta} \wedge \overline{c_\alpha X_{-\beta}}$, pour $\beta \in \Delta_{\ell_1,\mathrm{R}}/\sim$,
- ω'_{C_1} est le produit des $c_\alpha X_\beta \wedge c_\alpha X_{-\beta} \wedge \overline{c_\alpha X_\beta} \wedge \overline{c_\alpha X_{-\beta}} \wedge c_\alpha X_{\bar\beta} \wedge c_\alpha X_{-\bar\beta} \wedge \overline{c_\alpha X_{\bar\beta}} \wedge \overline{c_\alpha X_{-\bar\beta}}$, pour $\beta \in \Delta_{\ell_1,\mathrm{C}_1}/\sim$.

Comme pour tout $\beta \in \Delta_{V_{\mathbb{C}}}$, $s_\alpha\beta \notin \{\beta, \bar\beta\}$, on peut de plus supposer que les vecteurs radiciels correspondants ont étés choisis tels que $X_{s_\alpha\beta} = w_\alpha X_\beta$, où $w_\alpha = \exp\frac{\pi}{2}\,\mathrm{ad}\,W_\alpha$.

Soit $\beta \in \Delta_{V_{\mathbb{C}}}$. Alors, compte tenu de nos hypothèses, on a

$$c_\alpha\overline{X_{s_\alpha\beta}} = c_\alpha w_\alpha\overline{X_\beta} = w_\alpha\overline{c_\alpha X_\beta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\beta(H_\alpha)}\overline{c_\alpha X_\beta}. \tag{8.28}$$

Reportant cette égalité dans les expressions de ω'_{C_0} et ω'_{C_1}, on trouve $\omega'_{\mathrm{C}_0} = c_\alpha \omega_{\mathrm{R}}$ et $\omega'_{\mathrm{C}_1} = c_\alpha \omega_{\mathrm{C}_1}$.

Maintenant, soit $\beta \in \Delta_{\ell_1, \mathrm{C}_0}$. Alors, avec nos hypothèses on a $X_{-\bar\beta} = w_\alpha X_\beta$. Ainsi compte tenu de la relation (8.28), on a

$$c_\alpha \overline{X_{-\bar\beta}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\beta(H_\alpha)} \overline{c_\alpha X_\beta},$$

tandis que

$$c_\alpha \overline{X_\beta} = c_\alpha w_\alpha^{-1} \overline{X_{-\bar\beta}} = w_\alpha^{-1} \overline{c_\alpha X_{-\bar\beta}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\beta(H_\alpha)} \overline{c_\alpha X_{-\bar\beta}}.$$

Reportant ces deux égalités dans l'expression précédente de ω'_{I} et tenant compte de ce que $\beta(H_\alpha) \equiv 1 \bmod 2$, on trouve que $\omega'_{\mathrm{I}} = c_\alpha \omega_{\mathrm{C}_0}$.

Ainsi, on a $\omega' = (\det_{V_{\mathbb{C}}} c_\alpha)\omega$. Remarquons enfin que c_α est contenu dans l'image de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ par ψ_α, laquelle, commutant à γ_α, laisse invariant $V_{\mathbb{C}}$, si bien que $\det_{V_{\mathbb{C}}} c_\alpha = 1$. $\square$

8.11. Revenons donc au cas général et reprenons les notations du Théorème 7.4.1. Pour faire le calcul, on peut supposer de plus que, comme dans le numéro 8.6, R_g contient un facteur réductif de $G(g)$. On commence par le résultat suivant :

Lemme 34. *Soit $s \in G_{\mathrm{ell}}$ et $g \in \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$, tels que $s \in G(g)$ mais que $G.s$ ne rencontre pas $(R_g)_0\Gamma$. Alors, on a* :

$$\sum_{\tau \in X_{G,\chi}(g)} \dim\tau\, \xi_G(g,\tau)\, \mathrm{Tr}\big(\delta^g \tau(s)\big) = 0. \tag{8.29}$$

Démonstration. On peut supposer que $s \in R_g$. Alors, utilisant les formules (8.11) du Lemme 30 et (8.20) du numéro 8.8, on se ramène facilement au cas où G est réductif. Reprenons les notations introduites dans le numéro 8.4 et la démonstration du Lemme 28. Le membre de gauche de l'équation s'écrit alors

$$\sigma(s,g) = \sum_{\tau \in X_{G,\chi}(g)} \dim\tau\ \mathrm{Tr}\big(\Xi(g,\tau)\delta^g\tau(s)\big).$$

Cependant, on voit que de même que les opérateurs $\Xi(g,\tau,\alpha)$, les opérateurs $Z_\alpha(\tau) = \frac{1}{2}\epsilon_\alpha(\delta^g\tau(p(\gamma_\alpha)) + \delta^g\tau(p(\gamma_\alpha^{-1})))$, $\alpha \in \Phi_g^+$, commutent deux à deux, de sorte que l'on peut écrire

$$\Xi(g,\tau) = \left(\prod_{\alpha \in \Phi_g^+} \big|\tanh \pi g(H_\alpha)\big|\right) \sum_{k \in \mathbb{N}^{\Phi_g^+}} \big(\cosh^{-1}\pi g(H_.)\big)^k Z_.(\tau)^k,$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}^{\Phi_g^+}$ et toute famille d'éléments $(a_\alpha)_{\alpha \in \Phi_g^+}$ d'éléments commutant deux à deux d'une algèbre, on a posé $a_.^k = \prod_{\alpha \in \Phi_g^+} a_\alpha^{k_\alpha}$.

On voit alors que l'on a

$$\sigma(s,g) = \left(\prod_{\alpha \in \Phi_g^+} \big|\tanh \pi g(H_\alpha)\big|\right) \sum_{k \in \mathbb{N}^{\Phi_g^+}} \big(\cosh^{-1}\pi g(H_.)\big)^k \sum_{\tau \in X_{G,\chi}(g)} \dim\tau\, \mathrm{Tr}\big(Z_.(\tau)^k \delta^g\tau(s)\big).$$

Mais, pour $k \in \mathbb{N}^{\Phi_g^+}$ fixé, l'expression $\sum_{\tau \in X_{G,\chi}(g)} \dim\tau \operatorname{Tr}(Z_{.}(\tau)^k \delta^g \tau(s))$ est combinaison linéaire d'expressions de la forme $\sum_{\tau \in X_{G,\chi}(g)} \dim\tau \operatorname{Tr}(\tau(\tilde{\phi}_g(x)\tilde{s}))$, où x est un élément du sous-groupe de $\widetilde{J}_g$ engendré par les γ_α, $\alpha \in \Phi_g$ et $\tilde{s}$ est un élément de $G(g)^g$ situé au dessus de s. Or, il résulte facilement du théorème de Peter–Weyl pour les groupes finis modulo leur centre, qu'une telle expression est nulle dès que s n'est pas dans $p(\widetilde{J}_g)\Gamma \subset (R_g)_0\Gamma$. □

Supposons dans un premier temps que $p_G(s) \notin (R_g)_0\Gamma$. Alors, il résulte du Lemme 34 que le membre de droite de l'Éq. (8.21) est nul, ce qui, compte tenu de la formule (7.8), entraîne le résultat cherché dans ce cas.

Supposons maintenant que $p_G(s) \in (R_g)_0\Gamma$ et posons $\lambda = g|_{\mathfrak{r}_g}$. Alors, comme le résultat est vrai dans le cas réductif simplement connexe, la formule (7.8) permet d'écrire :

$$q_{G,\chi}(s,g) = \check{\chi}\big(s^{-1}s_g\big)\big[\widetilde{J}_g : (\widetilde{J}_g)_0\Gamma_g\big]^{-1} \sum_{\tau \in X_{\widetilde{R}_g,\chi_g}(\lambda)} \dim\tau\, \xi_{\widetilde{R}_g}(\lambda,\tau) \operatorname{Tr}\big(\tau\big(\phi_\lambda\big(\tilde{s}_g^{-1}\big)\big)\big), \quad (8.30)$$

où ϕ_λ désigne le morphisme injectif de $\widetilde{J}_g$ dans $\widetilde{R}_g(\lambda)^\lambda$ introduit au numéro 8.2.

Maintenant désignons par $r(s,g)$ le membre de droite de l'Éq. (8.21). On voit aisément que, si $\tau \in X_{G,\chi}(g)$, $\gamma \in p_G^{-1}(\Gamma)$ et $x \in p_G^{-1}(J_g)$, on a

$$\tau \circ \phi_g(x\gamma) = \check{\chi}(\gamma)\tau \circ \phi_g(x),$$

de sorte que l'on peut écrire

$$r(s,g) = \check{\chi}\big(s^{-1}s_g\big)\big[G(g) : G(g)_0\Gamma\big]^{-1} \sum_{\tau \in X_{G,\chi}(g)} \dim\tau\, \xi_G(g,\tau) \operatorname{Tr}\big(\tau \circ \phi_g\big(s_g^{-1}\big)\big).$$

Rappelons-nous maintenant le morphisme $\nu_g : \widetilde{R}_g \to R_g^u$, lequel envoie $\widetilde{J}_g$ dans $R_g^u(\lambda)$. Avec les notations du numéro 8.4, le morphisme $\tilde{\phi}_\lambda : \widetilde{J}_g \to (R_g^u(\lambda))^\lambda$ relève la restriction de ν_g à $\widetilde{J}_g$. Alors, la relation (8.15) du numéro 8.7, montre que si $\tau \in X_{G,\chi}(g)$, on a

$$\delta^g \circ \phi_g\big(s_g^{-1}\big)\tau \circ \phi_g\big(s_g^{-1}\big) = \delta^\lambda \circ \tilde{\phi}_\lambda\big(\tilde{s}_g^{-1}\big)\delta^u \circ \nu_g\big(\tilde{s}_g^{-1}\big)\tau^{R_g^u} \circ \tilde{\phi}_\lambda\big(\tilde{s}_g^{-1}\big). \quad (8.31)$$

Revenons maintenant à la démonstration de la formule (8.21). Tenant compte des relations (8.31), (8.16), (8.20) et du fait que $[G(g) : G(g)_0\Gamma] = [R_g^u(\lambda) : (R_g^u(\lambda))_0\Gamma_g^u]$, on a

$$\begin{aligned} r(s,g) &= \check{\chi}\big(s^{-1}s_g\big)\big[G(g) : G(g)_0\Gamma\big]^{-1} \sum_{\tau \in X_{G,\chi}(g)} \dim\tau\, \xi_G(g,\tau) \operatorname{Tr}\big(\tau^{R_g^u} \circ \tilde{\phi}_\lambda\big(\tilde{s}_g^{-1}\big)\big) \\ &= \check{\chi}\big(s^{-1}s_g\big)\big[R_g^u(\lambda) : \big(R_g^u(\lambda)\big)_0\Gamma_g^u\big]^{-1} \sum_{\tau \in X_{R_g^u,\chi_g^u}(\lambda)} \dim\tau \xi_{R_g^u}(\lambda,\tau) \operatorname{Tr}\big(\tau \circ \tilde{\phi}_\lambda\big(\tilde{s}_g^{-1}\big)\big). \end{aligned}$$

Alors, l'égalité cherchée est conséquence immédiate de la formule (8.30) et du Lemme 29 (car $p_G(s) \in J_g$) appliqué au groupe réductif R_g^u et au caractère χ_g^u. □

On a alors le corollaire suivant du Théorème 8.9.1 et du Lemme 34 :

Corollaire 8.11.1. *Soit $g \in \mathfrak{g}(s)^*_{G,\chi} \cap \mathscr{V}$ et $\tau \in X_{G,\chi}(g)$. Alors, l'expression*

$$\sum_{s \in J_g/(J_g)_0 \Gamma} q_{G,\chi}(s,g)\, \tau \circ \phi_g(s)$$

est bien définie et c'est un opérateur scalaire dans l'espace de τ. De plus, on a

$$\xi_G(g,\tau)\mathrm{Id} = \sum_{s \in J_g/(J_g)_0 \Gamma} q_{G,\chi}(s,g) \tau \circ \phi_g(s). \tag{8.32}$$

Démonstration. Elle résulte des formules (8.21) et (8.29), des propriétés de la fonction de Poisson–Plancherel $q_{G,\chi}$ établies dans le Théorème 7.4.1 et de l'orthonormalité pour la mesure normalisée des caractères projectifs du groupe fini $G(g)/G(g)_0\Gamma = \widetilde{G}(g)/\widetilde{G}(g)_0 p_G^{-1}(\Gamma)$. □

9. La formule de Plancherel

9.1. On reprend les notations du numéro 6.11 concernant la fonction ψ_G et la mesure $\mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}$. On renvoie à [22] pour les notions et résultats rappelés ci-après.

Soit $(g,\tau) \in X_{G,\chi}$ et ψ une fonction positive sur l'orbite Ω_g de g, semi-invariante de poids un caractère semi-rationnel Δ de G. Alors, ψ définit un opérateur $A^{\psi}_{g,\tau}$ fermé, à domaine dense et semi-invariant de poids Δ dans l'espace de $T_{g,\tau}$. On dit que la représentation $T_{g,\tau}$ est ψ-traçable si, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(G)$, la fermeture de l'opérateur $A^{\psi}_{g,\tau} T_{g,\tau}(\varphi\, \mathrm{d}_G x) A^{\psi}_{g,\tau}$, notée de même, est à trace, auquel cas l'application $\varphi\, \mathrm{d}_G x \mapsto \mathrm{Tr}(A^{\psi}_{g,\tau} T_{g,\tau}(\varphi\, \mathrm{d}_G x) A^{\psi}_{g,\tau})$ définit une fonction généralisée sur G, semi-invariante de poids Δ^2, notée $\Theta_{g,\tau,\psi}$ et appelée le ψ-caractère de $T_{g,\tau}$.

Comme les éléments de $\mathfrak{g}^*_r$ sont bien polarisables (voir [1, Chapitre 12, Proposition 13]), le Théorème 6.2.1 de [22] montre que la représentation $T_{g,\tau}$ est ψ-traçable si et seulement si la mesure $\psi^2\, \mathrm{d}\beta_{\Omega_g}$ est tempérée. Il résulte alors du Corollaire 6.11.1 que, pour $\mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}$-presque tout $\Omega \in G \setminus \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$, les représentations $T_{g,\tau}$, $g \in \Omega$, $\tau \in X_{G,\chi}(g)$, sont ψ_G-traçables.

Soit $g \in \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$ et ψ une fonction positive sur l'orbite Ω de g, semi-invariante comme plus haut, tels que les représentations $T_{g,\tau}$, $\tau \in X_{G,\chi}(g)$, soient ψ-traçables. On définit une fonction généralisée $\Theta_{\Omega,\chi,\psi}$ sur G, semi-invariante de poids Δ^2, en posant, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(G)$,

$$\Theta_{\Omega,\chi,\psi}(\varphi\, \mathrm{d}_G x) = \bigl[G(g) : G(g)_0\Gamma\bigr]^{-1} \sum_{\tau \in X_{G,\chi}(g)} \dim\tau\, \xi_G(g,\tau) \Theta_{g,\tau,\psi}(\varphi\, \mathrm{d}_G x). \tag{9.1}$$

En effet, il est clair que l'expression à droite du signe égale dans la formule (9.1) est indépendante du choix de $g \in \Omega$.

Nous allons démontrer le résultat suivant, qui décrit la formule de Plancherel pour G, relative au caractère χ.

Théorème 9.1.1. *Soit $\varphi \in \mathscr{D}(G)$. Alors l'expression $\Theta_{\Omega,\chi,\psi_G}(\varphi\, \mathrm{d}_G x)$, considérée comme une fonction de $\Omega \in G \setminus \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$, est $\mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}$-intégrable et l'on a*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \chi(\gamma)\varphi(\gamma) = \int_{G \setminus \mathfrak{g}^*_{G,\chi}} \Theta_{\Omega,\chi,\psi_G}(\varphi\, \mathrm{d}_G x)\, \mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}(\Omega). \tag{9.2}$$

9.2. Soit $s \in G_{\mathrm{ell}}$. La méthode de descente de Harish-Chandra permet de ramener l'étude des fonctions généralisées semi-invariantes dans un voisinage ouvert invariant assez petit de s à celle de fonctions généralisées $G(s)$-semi-invariantes dans un voisinage ouvert $G(s)$-invariant de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$ (voir [22, Proposition 3.2.3]).

En effet, selon cette méthode, si $\mathscr{V}$ est un ouvert $G(s)$-elliptique de $\mathfrak{g}(s)$ tel que l'application $\gamma(x, X) = xs \exp X x^{-1}$ induise un difféomorphisme de l'ouvert $G \times_{G(s)} \mathscr{V}$ du fibré vectoriel $G \times_{G(s)} \mathfrak{g}(s)$ sur l'ouvert G-invariant $\mathscr{W}(s, \mathscr{V})$ de G, toute fonction généralisée θ semi-invariante sur $\mathscr{W}(s, \mathscr{V})$ possède une restriction θ^s à $\mathscr{V}$, formellement définie par $\theta^s(X) = \theta(s \exp X)$, et l'application $\theta \mapsto \theta^s$ est un isomorphisme de l'espace des fonctions généralisées semi-invariantes de poids ϖ sur $\mathscr{W}(s, \mathscr{V})$ sur celui des fonctions généralisées semi-invariantes de poids $\varpi|_{G(s)}$ sur $\mathscr{V}$, munis de la topologie de la convergence faible. De plus, d'après le numéro 2.19, on peut prendre $\mathscr{V} = \mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)}$.

Désignons par θ_χ la fonction généralisée sur G qui à $\varphi \,\mathrm{d}_G x$ associe $\sum_{\gamma \in \Gamma} \chi(\gamma)\varphi(\gamma)$. Alors, la formule de Plancherel (9.2) s'interprète comme une égalité de fonctions généralisées dans G :

$$\theta_\chi = \int_{G \backslash \mathfrak{g}^*_{G,\chi}} \Theta_{\Omega,\chi,\psi_G} \,\mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}(\Omega).$$

Si $s \in G_{\mathrm{ell}}$, la fonction généralisée θ^s_χ est donnée sur $\mathfrak{g}(s)_{\varepsilon(s)}$ par :

$$\theta^s_\chi = 0, \quad s \notin \Gamma,$$
$$\theta^s_\chi(\varphi \,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)} X) = \chi(s)\varphi(0), \quad s \in \Gamma, \varphi \in \mathscr{D}\big(\mathfrak{g}(s)_{\varepsilon(s)}\big).$$

Comme expliqué dans [13], le Théorème 9.1.1 se ramène alors à la proposition suivante :

Proposition 9.2.1. *Pour tout $s \in G_{\mathrm{ell}}$ et tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathfrak{g}(s)_{\varepsilon(s)})$, l'application $\Omega \mapsto \Theta^s_{\Omega,\chi,\psi_G}$ $(\varphi \,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)} X)$ est $\mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}$-intégrable et on a* :

$$\int_{G \backslash \mathfrak{g}^*_{G,\chi}} \Theta^s_{\Omega,\chi,\psi_G}(\varphi \,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)} X) \,\mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}(\Omega) = \begin{cases} 0, & si\ s \notin \Gamma, \\ \chi(s)\varphi(0), & si\ s \in \Gamma. \end{cases} \tag{9.3}$$

9.3. La fin de ce paragraphe est consacrée à la démonstration de la Proposition 9.2.1. Nous commençons par rappeler la formule donnant, sous certaines conditions, une expression de $\Theta^s_{g,\tau,\psi}$ (voir [22, Théorème 6.2.1] ou plutôt le Théorème A.2.1 ci-après). On utilise notamment les notations du Numéro 2.19.

On rappelle que l'on définit une fonction $j_{\mathfrak{g}}$ analytique sur $\mathfrak{g}$ et strictement positive sur $\mathfrak{g}^\pi$, en posant

$$j_{\mathfrak{g}}(X) = \det \frac{\sinh(\mathrm{ad}\, X/2)}{\mathrm{ad}\, X/2}.$$

Étant donné $s \in G_{\mathrm{ell}}$, on pose $\mathfrak{g}_s = (1-s)\mathfrak{g}$ et on définit la fonction analytique réelle et strictement positive, $k_{\mathfrak{g},s}$, sur l'ouvert $G(s)$-elliptique $\mathfrak{g}^{\epsilon'(s)}(s)$ de $\mathfrak{g}(s)$ en posant :

$$k_{\mathfrak{g},s}(X) = j_{\mathfrak{g}(s)}(X)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\det_{\mathfrak{g}_s}(1 - s \exp X)}{\det_{\mathfrak{g}_s}(1-s)} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{9.4}$$

Soit $g \in \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$, $\tau \in X_{G,\chi}(g)$ et $s \in G_{\mathrm{ell}}$. On définit une fonction $\Phi^s_{G,g,\tau}$, notée aussi plus simplement $\Phi^s_{g,\tau}$, sur Ω^s_g en décidant que si $l \in \Omega^s_g$ et $x \in G$ sont tels que $l = x.g$, on a :

$$\Phi^s_{G,g,\tau}(l) = \det\nolimits_{(1-s).\ell}(1-s)^{-1} \operatorname{Tr}\bigl(\delta^{l x} \tau(s)\bigr), \tag{9.5}$$

où ℓ est un lagrangien pour β_l, positif et s-invariant. D'après [15, II.2, Lemme 19], le nombre $\Phi^s_{G,g,\tau}(l)$ ne dépend pas des choix de x et de ℓ.

Proposition 9.3.1. *Soit $s \in G_{\mathrm{ell}}$, $g \in \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$ et ψ une fonction positive semi-invariante de poids semi-rationnel sur Ω_g. On suppose que les mesures $\psi^2 \, \mathrm{d}\beta_{\Omega_g}$ et $\psi^2 \, \mathrm{d}\beta_{\Omega^s_g}$ sont tempérées. Alors, si $\tau \in X_{G,\chi}(g)$, la représentation $T_{g,\tau}$ est ψ-traçable et la restriction $\Theta^s_{g,\tau,\psi}$ de la fonction généralisée $\Theta_{g,\tau,\psi}$ à tout ouvert $G(s)$-elliptique $\mathcal{V}$ contenu dans $\mathfrak{g}^{\epsilon'(s)}(s)$ et tel que l'application γ induise un difféomorphisme de $G \times_{G(s)} \mathcal{V}$ sur $\mathcal{W}(s, \mathcal{V})$, en particulier, à $\mathcal{V} = \mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)}$, est donnée par* :

$$\Theta^s_{g,\tau,\psi}(\varphi \, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)} Y) = \int_{\Omega^s_g} \bigl(k^{-1}_{\mathfrak{g},s} \varphi \, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)} Y\bigr)\hat{}_{\mathfrak{g}(s)} \Phi^s_{g,\tau} \psi^2 \, \mathrm{d}\beta_{\Omega^s_g}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{V}). \tag{9.6}$$

9.4. On commence par démontrer la Proposition 9.2.1 dans le cas où l'élément elliptique s n'est pas en bonne position.

Tout d'abord, on a le résultat suivant, qui est une conséquence immédiate du Lemme 34 :

Lemme 35. *Soit $g \in \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$ et $s \in G_{\mathrm{ell}}$ tels que $G.s$ ne rencontre pas J_g. Alors, on a* :

$$\sum_{\tau \in X_{G,\chi}(g)} \dim \tau \, \xi_G(g,\tau) \Phi^s_{g,\tau}(l) = 0, \quad l \in \Omega^s_g. \tag{9.7}$$

Avec les notations du numéro 2.19, on a alors la proposition.

Proposition 9.4.1. *Soit $\Omega \in G \setminus \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$ une orbite, ψ une fonction positive semi-invariante de poids semi-rationnel sur Ω telles que la mesure $\psi^2 \, \mathrm{d}\beta_\Omega$ soit tempérée, $s \in G_{\mathrm{ell}}$ tel que s ne soit contenu dans aucun des J_g, $g \in \Omega$ et $\mathcal{V} \subset \mathfrak{g}^{\epsilon'(s)}(s)$ un ouvert $G(s)$-elliptique tel que l'application γ induise un difféomorphisme de $G \times_{G(s)} \mathcal{V}$ sur $\mathcal{W}(s, \mathcal{V})$. Alors, on a*

$$\Theta_{\Omega,\chi,\psi|\mathcal{W}(s,\mathcal{V})} = 0. \tag{9.8}$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que le groupe G soit ou bien réductif ou bien le produit semi-direct d'un groupe réductif par un groupe de Heisenberg dont le centre est central dans G. Dans cette situation, les orbites des formes fortement régulières sont fermées (voir, par exemple, [22, numéro 5.2.3]). Par suite la mesure $\psi^2\,\mathrm{d}_{\beta_{\Omega^s}}$ est tempérée, et il résulte alors de la Proposition 9.3.1 et du Lemme 35 que l'on a $\Theta^s_{\Omega,\chi,\psi}=0$. D'où notre assertion dans ce cas.

Si nous ne sommes pas dans ce cas, c'est que $\mathfrak{g}$ possède un idéal abélien G-invariant $\mathfrak{a}$, non centralisé par G et contenu dans ${}^u\mathfrak{g}$. Soit $g\in\Omega$ et Δ le poids de ψ. On pose $a=g|_{\mathfrak{a}}$, $H=G(a)$, $\boldsymbol{H}$ l'adhérence de Zariski de $j(G(a))$ dans $\boldsymbol{G}(a)$, $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}(a)$, $h=g|_{\mathfrak{h}}$ et $\mathfrak{q}=\ker a$. Alors $(H,j,\boldsymbol{H})$ est un sous-groupe presque algébrique de G et $\mathfrak{q}$ est un idéal H-invariant de $\mathfrak{h}$. On désigne par $\boldsymbol{A}$ (respectivement $\boldsymbol{Q}$) le sous-groupe unipotent de $\boldsymbol{H}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ (respectivement $\mathfrak{q}$) sur $\mathbb{R}$ et par A (respectivement Q) le sous-groupe unipotent de H de même algèbre de Lie. On note G_a le groupe quotient H/Q dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_a=\mathfrak{h}/\mathfrak{q}$, p_a la projection canonique de H sur G_a de même que sa différentielle, la projection canonique de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{g}_a$, $\boldsymbol{G}_a$ le groupe algébrique quotient $\boldsymbol{H}/\boldsymbol{Q}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_a$ sur $\mathbb{R}$, g_a la forme linéaire h vue comme une forme linéaire sur $\mathfrak{g}_a$, celle-là même telle que $h=g_a\circ p_a$, et Ω_a la G_a-orbite de g_a. Il est bien connu que $H.g=\{g'\in\Omega\colon\ g'|_{\mathfrak{a}}=a\}$ et que si $g'\in H.g$, on a $A.g'=g'+\mathfrak{h}^{\perp}$ (voir [29, pp. 500, 501]). Il est clair que Ω_a est l'image de $H.g$ par la projection canonique de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{h}^*$. Comme le caractère Δ est semi-rationnel, il est trivial sur A et sa restriction à H passe au quotient en un caractère semi-rationnel Δ_a de G_a. Par suite, la fonction $\psi|_{H.g}$ passe au quotient en une fonction ψ_a sur Ω_a semi-invariante de poids Δ_a. Il résulte alors de [22, numéro 5.1.8, formule (18)], que $\psi_a^2\,\mathrm{d}\beta_{\Omega_a}$ est une mesure tempérée sur $\mathfrak{g}_a^*$.

Le morphisme j, vu comme un morphisme de H dans $\boldsymbol{H}$, passe au quotient en un morphisme j_a de G_a dans $\boldsymbol{G}_a$, qui fait du triplet $(G_a,j_a,\boldsymbol{G}_a)$ un groupe presque algébrique réel. Comme $\ker j\cap Q$ est le groupe trivial, le noyau $\ker j_a$ de j_a s'identifie canoniquement à $\ker j$. On désigne alors par Γ_a le sous-groupe de $\ker j_a$ provenant, via cette identification, du sous-groupe Γ de $\ker j$ et par χ_a le caractère de Γ_a induit par χ. De plus, p_a induit un isomorphisme du tore $\mathfrak{j}=\mathfrak{j}_g$ sur son image $\mathfrak{j}_a=p_a(\mathfrak{j})$ dans $\mathfrak{g}_a$. Comme d'après [29, pp. 500, 501], on a $H(h)=G(g)A$, il est facile de voir que g_a est une forme linéaire fortement régulière sur $\mathfrak{g}_a$ et que $\mathfrak{j}_a=\mathfrak{j}_{g_a}$.

Considérons le revêtement métaplectique $H(h)^h$, vu comme un groupe presque algébrique au-dessus de l'adhérence de Zariski $\boldsymbol{L}$ de $j(H(h))$ dans $\boldsymbol{H}(h)$. Comme Q est un sous-groupe connexe de $H(h)$ agissant trivialement sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(h)$, il se relève de manière unique en un sous-groupe invariant, encore noté Q, de $H(h)^h$. Le groupe quotient $H(h)^h/Q$ est un groupe presque algébrique au-dessus de $\boldsymbol{L}/\boldsymbol{Q}$, canoniquement isomorphe à $G_a(g_a)^{g_a}$, vu comme un groupe presque algébrique au-dessus de l'adhérence de Zariski de $j_a(G_a(g_a))$ dans $\boldsymbol{G}_a(g_a)$.

Soit $\tau\in X_{G,\chi}(g)$. En utilisant le Lemme 2 on montre facilement les résultats suivants (voir aussi [10, IV.2 (9)]). Il existe une unique représentation τ^H de $H(h)^h$ telle que

$$\delta^g\tau(x)=\delta^h\tau^H(x),\quad x\in G(g),\tag{9.9}$$

$$\tau^H(\exp X)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle h,X\rangle}\mathrm{Id},\quad X\in\mathfrak{h}(h).\tag{9.10}$$

De plus, la représentation τ^H passe au quotient en une représentation τ_a de $G_a(g_a)^{g_a}$ et l'application $\tau\mapsto\tau_a$ induit une bijection de $X_{G,\chi}(g)$ sur $X_{G_a,\chi_a}(g_a)$. En particulier on voit que $g_a\in\mathfrak{g}^*_{G_a,\chi_a}$.

Maintenant, d'après [10, IV.2, Théorème 11 et Remarque 13], on a

$$T_{G,g,\tau}=\mathrm{Ind}_H^G(T_{G_a,g_a,\tau_a}\circ p_a).\tag{9.11}$$

Cela étant, si G_a est de même dimension que G, c'est soit un groupe réductif, soit le produit semi-direct d'un groupe réductif par un groupe de Heisenberg dont le centre est central dans G_a.

Raisonnant par récurrence sur la dimension de G, on voit donc que l'on peut supposer le résultat établi pour G_a. Cependant, avant d'aller plus loin dans l'utilisation de cette hypothèse, on commence par démontrer le résultat suivant :

Lemme 36. *Pour $\tau \in X_{G,\chi}(g)$, on a*

$$\xi_G(g,\tau) = \xi_{G_a}(g_a,\tau_a). \tag{9.12}$$

Démonstration. Reprenant les notations du numéro 6.9, écrivons $g = \lambda + g_1$, avec $\lambda \in \mathfrak{j}^*$ et $g_1 \in (\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1})^*$. Soit $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_g$ la sous-algèbre induisante canonique associée à g. Nous avons vu que g_1 est u-équivalente à g, admet $\mathfrak{b}$ comme sous-algèbre induisante canonique, a même restriction u que g à ${}^u\mathfrak{b}$, que $\mathfrak{g}(g_1)$ est contenu dans $\mathfrak{b}$, que tout facteur réductif de $\mathfrak{g}(g_1)$ est un facteur réductif de $\mathfrak{b}$ et que $\mathfrak{b}$ appartient à $Cosu_1(g)$. Soit $B = B_g$ le sous-groupe induisant canonique associé à g, $R \subset B$ un facteur réductif stabilisant u et contenant un facteur réductif de $G(g)$, et $\mathfrak{r}$ l'algèbre de Lie de R. Comme, par construction, ${}^u\mathfrak{b}$ contient ${}^u\mathfrak{g}$, il est clair que R est contenu dans H.

Posons $h_1 = g_{1|\mathfrak{h}}$. Alors, il résulte de [9, Chapitre I, numéros 17, 18 et 26], que $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}$ est une sous-algèbre coisotrope de type unipotent à la fois pour h et h_1, que ${}^u\mathfrak{c} = {}^u\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}$, de sorte que h et h_1 ont même restriction v à ${}^u\mathfrak{c}$ et que h_1 est une forme de type unipotent u-équivalente à h. Comme $H(h) = G(g)A$ et comme $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{c}$, on voit que $C = B \cap H$ est le sous-groupe induisant d'algèbre de Lie $\mathfrak{c}$ associé à h, si bien que R est un facteur réductif de C stabilisant v.

Posons $\mathfrak{b}_a = p_a(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}/\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}_a = p_a(\mathfrak{r})$, $B_a = p_a(C) = C/Q$, $R_a = p_a(R)$ et désignons par $g_{a,1}$ (respectivement λ_a, u_a), h_1 (respectivement λ, v) considérée comme une forme linéaire sur $\mathfrak{g}_a$ (respectivement $\mathfrak{j}_a$, ${}^u\mathfrak{c}/\mathfrak{q} = {}^u\mathfrak{b}_a$). Alors, $\mathfrak{b}_a$ est une sous-algèbre coisotrope acceptable à la fois pour g_a et $g_{a,1}$, lesquelles admettent u_a comme restriction commune à ${}^u\mathfrak{b}_a$, et $g_{a,1}$ est une forme de type unipotent u-équivalente à g_a. De plus, B_a est le sous-groupe induisant d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}_a$ associé à g_a, R_a est un facteur réductif de B_a stabilisant u_a et contenant un facteur réductif de $G_a(g_a)$, et p_a induit un isomorphisme canonique de R (respectivement $\mathfrak{r}$) sur R_a (respectivement $\mathfrak{r}_a$) et donc de $\widetilde{R}$ sur $\widetilde{R}_a$, tous deux encore notés p_a. Soit $\widetilde{J}$ (respectivement $\widetilde{J}_a$) le stabilisateur de λ (respectivement λ_a) dans $\widetilde{R}$ (respectivement $\widetilde{R}_a$), qui est aussi le sous-groupe de Cartan de $\widetilde{R}$ (respectivement $\widetilde{R}_a$) d'algèbre de Lie $\mathfrak{j}$ (respectivement $\mathfrak{j}_a$). Il est clair que p_a induit aussi un isomorphisme de $\widetilde{J}$ sur $\widetilde{J}_a$.

Soit donc $\tau \in X_{G,\chi}(g)$. D'après la Proposition 8.7.1 et sa démonstration appliquées avec $R^u_{\mathfrak{b}} = R^u_g = R^u$ (respectivement $R^{u_a}_{\mathfrak{b}_a} = R^{u_a}_a$), on a $\xi_G(g,\tau) = \xi_{R^u}(\lambda, \tau^{R^u})$ (respectivement $\xi_{G_a}(g_a,\tau_a) = \xi_{R^{u_a}_a}(\lambda_a, \tau_a^{R^{u_a}_a})$), le membre de droite de l'égalité ne dépendant que de la représentation $\tau^{R^u} \circ \tilde{\phi}_\lambda$ (respectivement $\tau^{R^{u_a}_a} \circ \tilde{\phi}_{\lambda_a}$) de $\widetilde{J}$ (respectivement $\widetilde{J}_a$). Il suffit donc de montrer que, modulo identification de $\widetilde{J}$ et $\widetilde{J}_a$ via l'isomorphisme canonique p_a, les représentations $\tau^{R^u} \circ \tilde{\phi}_\lambda$ et $\tau^{R^{u_a}_a} \circ \tilde{\phi}_{\lambda_a}$ sont identiques. Cependant, il résulte de la formule (9.9) que l'on a

$$\delta^g \tau(x) = \delta^{g_a} \tau_a\big(p_a(x)\big), \quad x \in J.$$

Ainsi, avec les notations du numéro 8.5, compte tenu de la formule (8.15), de la formule (8.16) du Lemme 31 et du fait évident que $\delta^\lambda \circ \tilde{\phi}_\lambda = \delta^{\lambda_a} \circ \tilde{\phi}_{\lambda_a} \circ p_a$, on se ramène à montrer que

$$\delta^u \circ \nu_{\mathfrak{b}}(x) = \delta^{u_a} \circ \nu_{\mathfrak{b}_a}\big(p_a(x)\big), \quad x \in \widetilde{J}. \tag{9.13}$$

Comme $\mathfrak{q}$ est contenu dans $\mathfrak{h}(h)$, il est évident que la relation (9.13) équivaut à

$$\delta^u \circ \nu_{\mathfrak{b}}(x) = \delta^v \circ \nu_{\mathfrak{c}}(x), \quad x \in \widetilde{J}.$$

Il est immédiat que ${}^uC = ({}^uB)(a)$ et le résultat de Pukanszky déjà mentionné montre alors que $({}^uC)(v) = ({}^uB)(u)A$, soit encore $({}^u\mathfrak{c})(v) = ({}^u\mathfrak{b})(u) + \mathfrak{a}$. D'autre part, la forme bilinéaire alternée β_u sur ${}^u\mathfrak{b}$ induit une dualité $\mathfrak{r}$-invariante entre ${}^u\mathfrak{b}/{}^u\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}(u)$. On voit alors que l'on peut trouver des sous-espaces $\mathfrak{r}$-invariants, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{w}$ tels que

$${}^u\mathfrak{b} = {}^u\mathfrak{c} \oplus \mathfrak{l}, \qquad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}(u) \oplus \mathfrak{m}, \quad {}^u\mathfrak{c} = \big({}^u\mathfrak{c}\big)(v) \oplus \mathfrak{w}$$

et $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}$ soit un sous-espace symplectique de ${}^u\mathfrak{b}$ orthogonal au sous-espace symplectique $\mathfrak{w}$. De plus, il est clair que $\mathfrak{m}$ est un lagrangien de $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}$.

Identifions alors $\mathrm{Mp}(\mathfrak{w})$ (respectivement $\mathrm{Mp}(\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m})$) au sous-groupe de $\mathrm{Mp}({}^u\mathfrak{b}/({}^u\mathfrak{b})(u)) = \mathrm{Mp}(\mathfrak{w} \oplus (\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}))$ constitué des éléments agissant trivialement dans $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}$ (respectivement $\mathfrak{w}$). L'action adjointe du groupe simplement connexe $\widetilde{R}$ dans $\mathfrak{w}$ (respectivement $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}$) se relève alors canoniquement en un morphisme $\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{w}} : \widetilde{R} \to \mathrm{Mp}(\mathfrak{w})$ (respectivement $\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{m}} : \widetilde{R} \to \mathrm{Mp}(\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m})$). Enfin, comme $\mathfrak{m}$ est un lagrangien invariant sous l'action du groupe connexe $\widetilde{R}$, on a

$$\delta^{\beta_{u|\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{m}}}\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{m}}(x)\big) = 1, \quad x \in \widetilde{R}.$$

On en déduit que, pour tout $x \in \widetilde{R}$, on a

$$\delta^u \circ \nu_{\mathfrak{b}}(x) = \delta^{\beta_{u|\mathfrak{w}}}\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{w}}(x)\big)\delta^{\beta_{u|\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{m}}}\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{m}}(x)\big) = \delta^{\beta_{u|\mathfrak{w}}}\big(\widetilde{\mathrm{Ad}}_{\mathfrak{w}}(x)\big) = \delta^v \circ \nu_{\mathfrak{c}}(x). \quad \square$$

On reprend la démonstration de la proposition. On se donne des mesures de Haar $\mathrm{d}_Q x$ et $\mathrm{d}_H x$ sur Q et H respectivement et on munit G_a de la mesure de Haar $\mathrm{d}_{G_a} x$ quotient de $\mathrm{d}_H x$ par $\mathrm{d}_Q x$ et G/H de la mesure $\mathrm{d}_{G/H}\dot{x}$ quotient de $\mathrm{d}_G x$ et $\mathrm{d}_H x$. Étant donné $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ et $x \in G$, on définit les fonctions $\varphi^x \in \mathscr{D}(H)$ et $(\varphi^x)_a \in \mathscr{D}(G_a)$ en posant

$$\varphi^x(y) = \varphi\big(xyx^{-1}\big), \quad y \in H,$$
$$\big(\varphi^x\big)_a\big(p_a(y)\big) = \int_Q \varphi^x(yz)\,\mathrm{d}_Q z, \quad y \in H.$$

Remarquons que le caractère rationnel $\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \mathrm{Ad}$ de H passe au quotient en un caractère rationnel de G_a. On a alors le résultat suivant :

Lemme 37. *Pour $\varphi \in \mathscr{D}(G)$, on a*

$$\Theta_{\Omega,\chi,\psi}(\varphi\,\mathrm{d}_G x) = \int_{G/H} \Delta^{-2}(x)|\det \mathrm{Ad}\, x|\Theta_{\Omega_a,\chi_a,\psi_a}\big(|\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \mathrm{Ad}|^{-\frac{1}{2}}\big(\varphi^x\big)_a\,\mathrm{d}_{G_a} y\big)\,\mathrm{d}_{G/H}\dot{x}, \tag{9.14}$$

l'intégrale étant absolument convergente.

Démonstration. Lorsque Δ est le caractère trivial, le résultat est conséquence de la relation (9.11), de [22, formule (59), p. 1354] et du fait que, pour $\tau \in X_{G,\chi}(g)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(H)$, on a $\Theta_{\Omega_a,\tau_a}(\varphi_a \, \mathrm{d}_{G_a} x) = \operatorname{Tr} T_{G_a,g_a,\tau_a} \circ p_a(\varphi \, \mathrm{d}_H x)$.

Dans le cas général, on note K le noyau de Δ. C'est un sous-groupe presque algébrique de G qui contient $\ker j$ et A. On note $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie et on pose $k = g|_{\mathfrak{k}}$. On vérifie facilement que $k \in \mathfrak{k}^*_{K,\chi}$. De plus, il résulte de [22, Lemme 5.1.2, numéros 5.2.2 et 5.3.3], que l'on a $K(k) = G(g)^u(K(k))$, qu'il existe une bijection $\tau \mapsto \tau^K$ de $X_{G,\chi}(g)$ sur $X_{K,\chi}(k)$ entièrement déterminée par la relation

$$\delta^g \tau(x) = \delta^k \tau^K(x), \quad x \in G(g),$$

et que, pour $\tau \in X_{G,\chi}(g)$, $T_{g,\tau} = \operatorname{Ind}_K^G T_{K,k,\tau^K}$. Désignons par ω la K-orbite de k. Il résulte alors de la formule décrivant $A^{\psi}_{g,\tau} T_{g,\tau}(\varphi \, \mathrm{d}_G x) A^{\psi}_{g,\tau}$ comme un opérateur à noyau (voir [22, formule (45), p. 1340]) et du théorème de Mercer que l'on a, l'intégrale étant absolument convergente et avec les conventions habituelles pour les mesures :

$$\Theta_{\Omega,\chi,\psi}(\varphi \, \mathrm{d}_G x) = \psi(g)^2 \int\limits_{G/K} \Delta(x)^{-2} |\det \operatorname{Ad} x| \Theta_{\omega,\chi}\big(\varphi^x|_K \, \mathrm{d}_K z\big) \, \mathrm{d}_{G/K} \dot{x}, \quad \varphi \in \mathscr{D}(G). \quad (9.15)$$

Mais a est également la restriction de k à l'idéal abélien K-invariant $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{k}$. Posons $M = K \cap H = K(a)$ et désignons par $\mathfrak{m}$ son algèbre de Lie. Alors, exprimant $\Theta_{\omega,\chi}$ à l'aide de (9.14) appliqué dans le cas où Δ est trivial, tenant compte de ce que $\det \operatorname{Ad} y = \det_{\mathfrak{k}} \operatorname{Ad} y$, $y \in K$, et reportant l'expression obtenue dans (9.15), on trouve :

$$\begin{aligned}
\Theta_{\Omega,\chi,\psi}(\varphi \, \mathrm{d}_G x) &= \psi(g)^2 \int\limits_{G/K} \Delta(x)^{-2} |\det \operatorname{Ad} x| \int\limits_{K/M} |\det\nolimits_{\mathfrak{k}} \operatorname{Ad} y| \\
&\quad \times \Theta_{\omega_a,\chi_a}\Big(|\det\nolimits_{\mathfrak{k}/\mathfrak{m}} \operatorname{Ad}|^{-\frac{1}{2}} \big(\varphi^{xy}|_K\big)_a \, \mathrm{d}_{K_a} z\Big) \, \mathrm{d}_{K/M} \dot{y} \, \mathrm{d}_{G/K} \dot{x} \\
&= \psi(g)^2 \int\limits_{G/M} \Delta(x)^{-2} |\det \operatorname{Ad} x| \Theta_{\omega_a,\chi_a}\Big(|\det\nolimits_{\mathfrak{k}/\mathfrak{m}} \operatorname{Ad}|^{-\frac{1}{2}} \big(\varphi^{x}|_K\big)_a \, \mathrm{d}_{K_a} z\Big) \, \mathrm{d}_{G/M} \dot{x} \\
&= \psi(g)^2 \int\limits_{G/H} \Delta(x)^{-2} |\det \operatorname{Ad} x| \int\limits_{H/M} \Delta(y)^{-2} |\det\nolimits_{\mathfrak{h}} \operatorname{Ad} y| \\
&\quad \times \Theta_{\omega_a,\chi_a}\Big(|\det\nolimits_{\mathfrak{k}/\mathfrak{m}} \operatorname{Ad}|^{-\frac{1}{2}} \big(\varphi^{xy}|_K\big)_a \, \mathrm{d}_{K_a} z\Big) \, \mathrm{d}_{H/M} \dot{y} \, \mathrm{d}_{G/H} \dot{x},
\end{aligned}$$

les intégrales étant absolument convergentes.

Maintenant, on remarque que $K_a = \ker \Delta_a$, $k_a = g_{a|\mathfrak{k}_a}$, $\omega_a = K_a.k_a$, $H/M = G_a/K_a$ et $(\varphi^{xy}|_K)_a = |\det_{\mathfrak{q}} \operatorname{Ad} y|^{-1}((\varphi^x)_a)^y|_{K_a}$, pour $x \in G$, $y \in H$. Ainsi, comme $\det_{\mathfrak{k}/\mathfrak{m}} \operatorname{Ad} z = \det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \operatorname{Ad} z$, $z \in M$, il vient

$$\begin{aligned}
\Theta_{\Omega,\chi,\psi}(\varphi \, \mathrm{d}_G x) &= \psi(g)^2 \int\limits_{G/H} \Delta(x)^{-2} |\det \operatorname{Ad} x| \int\limits_{G_a/K_a} \Delta_a(y)^{-2} |\det\nolimits_{\mathfrak{g}_a} \det \operatorname{Ad} y| \\
&\quad \times \Theta_{\omega_a,\chi_a}\Big(|\det\nolimits_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \det \operatorname{Ad}|^{-\frac{1}{2}} \big((\varphi^x)_a\big)^y|_{K_a} \, \mathrm{d}_{K_a} z\Big) \, \mathrm{d}_{G_a/K_a} \dot{y} \, \mathrm{d}_{G/H} \dot{x}.
\end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer, dans cette dernière expression, la formule (9.15) à l'intégrale portant sur G_a/K_a pour obtenir le résultat cherché. $\square$

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition. Soit donc $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(s,\mathcal{V}))$. Nous devons montrer que $\Theta_{\Omega,\chi,\psi}(\varphi\, \mathrm{d}_G x) = 0$. Comme s est elliptique, $G.s \cap H$ est une réunion finie, éventuellement vide, de H-orbites d'éléments elliptiques de H, disons $G.s \cap H = \bigsqcup_{i=1}^{n} H.s_i$ (voir [14, Lemme 63]). Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, soit $x_i \in G$ tel que $s_i = x_i s x_i^{-1}$. Alors, d'après [22, Lemme 3.1.2], ou plutôt le Lemme 39 ci-après, on a $\mathcal{W}(s,\mathcal{V}) \cap H = \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{W}_H(s_i, \mathrm{Ad}\, x_i(\mathcal{V}) \cap \mathfrak{h})$.

Posons, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $s_{i,a} = p_a(s_i)$ et $\mathcal{V}_{i,a} = p_a(\mathrm{Ad}\, x_i(\mathcal{V}) \cap \mathfrak{h})$. Alors, il est clair que $s_{i,a}$ est un élément elliptique de G_a qui n'est contenu dans aucun des J_l, $l \in \Omega_a$ et il est immédiat, d'après le Lemme 1, que $\mathcal{V}_{i,a}$ est un ouvert $G_a(s_{i,a})$-elliptique de $\mathfrak{g}_a(s_{i,a})$, contenu dans $\mathfrak{g}_a^{\epsilon'_{\mathfrak{g}_a}(s_{i,a})}(s_{i,a})$ et tel que l'application γ induise un difféomorphisme de $G_a \times_{G_a(s_{i,a})} \mathcal{V}_{i,a}$ sur $\mathcal{W}(s_{i,a}, \mathcal{V}_{i,a})$. Ainsi, $s_{i,a}$ et $\mathcal{V}_{i,a}$ satisfont les hypothèses de la proposition relativement au groupe G_a, au caractère χ_a et à l'orbite Ω_a.

Soit $x \in G$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose $(\varphi^x)_{i,a} = \mathbb{1}_{\mathcal{W}(s_{i,a},\mathcal{V}_{i,a})}(\varphi^x)_a$. Il est clair que $(\varphi^x)_{i,a}$ est un élément de $\mathcal{D}(\mathcal{W}(s_{i,a},\mathcal{V}_{i,a}))$ et que $(\varphi^x)_a = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} (\varphi^x)_{i,a}$. On obtient alors

$$\Theta_{\Omega_a,\chi_a,\psi_a}\bigl(|\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \mathrm{Ad}\,|\bigl(\varphi^x\bigr)_a \,\mathrm{d}_{G_a} y\bigr) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \Theta_{\Omega_a,\chi_a,\psi_a}\bigl(|\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} \mathrm{Ad}\,|\bigl(\varphi^x\bigr)_{i,a} \,\mathrm{d}_{G_a} y\bigr). \quad (9.16)$$

Mais, l'hypothèse faite sur G_a montre que chacun des termes de la somme ci-dessus est nul, si bien que reportant l'égalité (9.16) dans la formule (9.14), on obtient que $\Theta_{\Omega,\chi,\psi}(\varphi\, \mathrm{d}_G x) = 0$. Ceci achève la démonstration de la Proposition 9.4.1. $\square$

On en déduit immédiatement que la Proposition 9.2.1 est vraie lorsque $s \in G_{\mathrm{ell}} \setminus G_{\mathrm{ell,bp}}$.

9.5. Examinons le cas restant. Soit donc $s \in G_{\mathrm{ell,bp}}$ et $\tilde{s} \in \widetilde{G}_{\mathrm{ell,bp}}$ tel que $p_G(\tilde{s}) = s$. On commence par le résultat suivant. Étant donné $l \in \mathfrak{g}(s)^*_r$ et ℓ un lagrangien pour β_l, positif et s-invariant, on pose

$$\sigma(\tilde{s}, l) = \det{}_{(1-s).\ell}(1-s)^{-1}\delta^l\bigl(\phi_l(\tilde{s})\bigr). \quad (9.17)$$

Comme l'indique la notation choisie, ce nombre est indépendant du choix du lagrangien ℓ, s-invariant et positif pour β_l (voir le numéro 4.5).

Lemme 38. *Le nombre*

$$\frac{\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(l)}{|\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(l)|}\sigma(\tilde{s}, l)$$

ne dépend pas du choix de $l \in \mathfrak{g}(s)^*_r$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du Lemme 8 appliqué à $V = \mathfrak{g}_s$ et à $\widetilde{\mathrm{Ad}}_G(\tilde{s})$, que l'on peut voir de manière canonique comme un élément de $\mathrm{ML}(\mathfrak{g}_s)$. $\square$

Avec les notations du Lemme 38, on pose

$$\sigma(\tilde{s}) = (2\pi)^{-(d_{\mathfrak{g}}-d_{\mathfrak{g}(s)})}\mathrm{i}^{d_{\mathfrak{g}}-d_{\mathfrak{g}(s)}}\frac{\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(l)}{|\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(l)|}\sigma(\tilde{s}, l). \tag{9.18}$$

On remarquera que, si s est dans $\ker j$, on a $\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)} = 1$ et $\sigma(\tilde{s}) = \zeta(\tilde{s})$.

Le polynôme $\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}$ est un élément de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g}(s))$ et, à ce titre, définit un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants sur cet espace, noté $\partial_{\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}}$.

Étant donné $\Omega \in G \setminus \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$ telle que la mesure $\psi_G^2\,\mathrm{d}\beta_{\Omega^s}$ soit tempérée, on définit la fonction généralisée tempérée $\theta^s_{\Omega,\chi,\psi_G}$ sur $\mathfrak{g}(s)$ en posant pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{g}(s))$

$$\begin{aligned}\theta^s_{\Omega,\chi,\psi_G}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)}X) = \big[G(g) : G(g)_0\Gamma\big]^{-1} \sum_{\tau \in X_{G,\chi}(g)} \dim\tau\,\xi_G(g,\tau)\\ \times \int_{\Omega^s} (\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)}X)\hat{}_{\mathfrak{g}(s)}(l)\Phi^s_{g,\tau}(l)\psi_G^2(l)\,\mathrm{d}\beta_{\Omega^s}(l).\end{aligned}$$

Cependant compte tenu du Théorème 8.9.1 et de la formule (9.17), on a sous les mêmes hypothèses et pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{g}(s))$,

$$\theta^s_{\Omega,\chi,\psi_G}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)}X) = \int_{\Omega^s} (\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)}X))\hat{}_{\mathfrak{g}(s)}(l)\sigma(\tilde{s}, l)q_{G,\chi}\big(\tilde{s}^{-1}, l\big)\psi_G^2(l)\,\mathrm{d}\beta_{\Omega^s}(l). \tag{9.19}$$

D'autre part, il résulte des Corollaires 6.12.1, 6.11.1 et de la Proposition 9.3.1 que, pour $\mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}$ presque tout $\Omega \in G \setminus \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$, la fonction généralisée $\theta^s_{\Omega,\chi,\psi_G}$ est définie et tempérée et que

$$\Theta^s_{\Omega,\chi,\psi_G}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)}X) = \theta^s_{\Omega,\chi,\psi_G}\big(k^{-1}_{\mathfrak{g},s}\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)}X\big), \quad \varphi \in \mathscr{D}\big(\mathfrak{g}(s)_{\varepsilon(s)}\big).$$

Comme dans [13], on voit alors que la Proposition 9.2.1 est conséquence de la formule de Poisson–Plancherel (9.20) suivante :

Théorème 9.5.1. *Pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{g}(s))$, l'application $\Omega \mapsto \theta^s_{\Omega,\chi,\psi_G}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)}X)$ est $\mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}$-intégrable et on a la relation* :

$$\int_{G\setminus\mathfrak{g}^*_{G,\chi}} \theta^s_{\Omega,\chi,\psi_G}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)}X)\,\mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}(\Omega) = \sigma(\tilde{s})v_{G,\chi,\tilde{s}^{-1}}\big(\partial_{\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}}(\varphi)\big). \tag{9.20}$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathfrak{g}(s))$. Compte tenu de ce qui précède et des formules (9.19) et (9.18), pour $\mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}$ presque tout $\Omega \in G \setminus \mathfrak{g}^*_{G,\chi}$, on a :

$$\begin{aligned}\theta^s_{\Omega,\chi,\psi_G}(\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)}X) = (2\pi)^{(d_{\mathfrak{g}}-d_{\mathfrak{g}(s)})}\mathrm{i}^{-(d_{\mathfrak{g}}-d_{\mathfrak{g}(s)})}\sigma(\tilde{s})\\ \times \int_{\Omega^s} (\varphi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)}X)\hat{}\,(l)q_{G,\chi}\big(\tilde{s}^{-1}, l\big)\frac{\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(l)}{|\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(l)|}\psi_G^2(l)\,\mathrm{d}\beta_{\Omega^s}(l).\end{aligned} \tag{9.21}$$

Il résulte alors des propriétés de la fonction de Poisson–Plancherel $q_{G,\chi}$ et du Lemme 20 que l'application $\Omega \mapsto \theta^s_{\Omega,\chi,\psi_G}(\varphi\, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)} X)$ est $\mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}$-mesurable. Posons

$$I = \int\limits_{G\backslash \mathfrak{g}^*_{G,\chi}} \left|\theta^s_{\Omega,\chi,\psi_G}(\varphi\, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)} X)\right| \mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}(\Omega).$$

L'égalité (9.21) et la formule (6.19) du Lemme 20 montrent que l'on a :

$$\begin{aligned} I &\leqslant (2\pi)^{(d_{\mathfrak{g}} - d_{\mathfrak{g}(s)})} \left|\sigma(\tilde{s})\right| \int\limits_{G\backslash \mathfrak{g}^*_{G,\chi}} \left\{ \int\limits_{\Omega^s} \left|(\varphi\, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)} X)\hat{}\,(l) q_{G,\chi}\left(\tilde{s}^{-1}, l\right)\right| \psi^2_G(l)\, \mathrm{d}\beta_{\Omega^s}(l) \right\} \mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}(\Omega) \\ &\leqslant \left|\sigma(\tilde{s})\right| \int\limits_{\mathfrak{g}(s)^*} \left|(\varphi\, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)} X)\hat{}\,(l) \pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(l)\right| \left|q_{G,\chi,\tilde{s}^{-1}}(l)\right| \mathrm{d}m_{G(s),\chi}(l). \end{aligned}$$

Comme $|q_{G,\chi,\tilde{s}^{-1}}|\, \mathrm{d}m_{G(s),\chi}$ est une mesure de Radon tempérée sur $\mathfrak{g}(s)^*$, il est clair que l'intégrale I est convergente. Ceci montre la première assertion du théorème.

Étant assurés de l'absolue convergence de l'intégrale, nous pouvons, grâce aux mêmes calculs et compte tenu de la formule de Poisson–Plancherel (7.4), écrire

$$\begin{aligned} &\int\limits_{G\backslash \mathfrak{g}^*_{G,\chi}} \theta^s_{\Omega,\chi,\psi_G}(\varphi\, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)} X)\, \mathrm{d}\mu_{G,\chi,\psi_G}(\Omega) \\ &\quad = \sigma(\tilde{s}) \int\limits_{\mathfrak{g}(s)^*} (\varphi\, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}(s)} X)\hat{}\,(l) \mathrm{i}^{-(d_{\mathfrak{g}} - d_{\mathfrak{g}(s)})} \pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}(l) q_{G,\chi,\tilde{s}^{-1}}(l)\, \mathrm{d}m_{G(s),\chi}(l) \\ &\quad = \sigma(\tilde{s}) v_{G,\chi,\tilde{s}^{-1}}\left(\partial_{\pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(s)}}(\varphi)\right). \quad \square \end{aligned}$$

Annexe A. Errata à l'article [22] « La formule du caractère pour les groupes de Lie presque algébriques réels »

A.1. La démonstration donnée dans [22] de la formule du caractère au voisinage d'un élément elliptique est incorrecte. Le point est que les ouverts elliptiques $\mathscr{W}(s, \epsilon(s))$ ne sont pas adaptés au raisonnement par récurrence, particulièrement lorsque l'hypothèse de récurrence s'applique à un quotient d'un sous-groupe du groupe considéré. Ainsi, dans [22, numéro 8.2.2], il est indiqué que « $\epsilon(s) \leqslant \epsilon_{G_1}(s)$ », où G_1 est le groupe quotient de G par un certain sous-groupe unipotent invariant. Or, la définition du nombre $\epsilon_{G_1}(s)$ suppose le choix d'un plongement du groupe $\boldsymbol{G}_1$ dans un groupe linéaire et il n'est pas évident du tout qu'un tel plongement existe pour lequel l'inégalité annoncée soit vraie.

Par contre, les ouverts elliptiques $\mathscr{W}(s, \mathscr{V})$ introduits au numéro 2.19 sont tout à fait adaptés au raisonnement par récurrence pour la démonstration de la formule du caractère. Dans les numéros suivants, nous allons, en premier lieu, énoncer une version un peu plus générale de la formule du caractère que celle de [22, Théorème 6.2.1], laquelle se prête bien à une démonstration par récurrence sur la dimension, et ensuite expliquer ce qu'il faut modifier dans la rédaction de cet article pour que cette démonstration soit complète.

A.2. Nous reprenons les notations de [22, numéro 6.2.2] et du numéro 2.19 du présent article. En particulier, ici X_G désigne l'ensemble des couples (g,τ) tels que $g \in \mathfrak{g}^*$ soit une forme linéaire bien polarisable et admissible et τ soit un élément de $X_G(g)$ (voir [22, numéros 5.1.1 et 5.2.1]). Enfin on définit la fonction $k_{\mathfrak{g},s}$ comme au numéro 9.3 du présent article.

On a alors le résultat suivant.

Théorème A.2.1. *Soit G un groupe presque algébrique réel, $(g,\tau) \in X_G$, χ un caractère semi-rationnel de G dont la restriction à $G(g)$ est triviale, et ψ une fonction réelle positive semi-invariante de poids χ sur Ω_g. On suppose que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(g)$ est nilpotente. Alors,*

(i) *les assertions suivantes sont équivalentes* :
  (a) *la représentation $T_{g,\tau}$ est ψ-traçable,*
  (b) *la mesure $\psi^2\,\mathrm{d}\beta_{\Omega_g}$ est tempérée* ;
(ii) *si les conditions équivalentes du* (i) *sont satisfaites et si s est un élément elliptique de G tel que la mesure $\psi^2\,\mathrm{d}\beta_{\Omega_g^s}$ soit également tempérée, alors la restriction $\Theta^s_{g,\tau,\psi}$ de la fonction généralisée $\Theta_{g,\tau,\psi}$ à tout ouvert $G(s)$-elliptique $\mathscr{V}$ contenu dans $\mathfrak{g}^{\epsilon'(s)}(s)$ et tel que l'application γ induise un difféomorphisme de $G \times_{G(s)} \mathscr{V}$ sur $\mathscr{W}(s,\mathscr{V})$, en particulier à $\mathscr{V} = \mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)}$, est donnée par* :

$$\Theta^s_{g,\tau,\psi}(\varphi\,\mathrm{d}Y) = \int_{\Omega_g^s} \left(k_{\mathfrak{g},s}^{-1}\varphi\,\mathrm{d}Y\right)\hat{}_{\mathfrak{g}(s)}\,\Phi^s_{g,\tau}\,\psi^2\,\mathrm{d}\beta_{\Omega_g^s}, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{V}), \tag{A.1}$$

où $\mathrm{d}Y$ est une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}(s)$.

A.3. Tout d'abord, l'assertion (i) de [22, Lemme 3.1.2] n'est pas adaptée à la démonstration de la formule du caractère (A.1). En fait, il convient d'utiliser le résultat suivant, qui la généralise et dont la démonstration est identique. On utilise les notations du numéro 2.19.

Lemme 39. *Soit $0 < \eta \leqslant \epsilon'(s)$ et $X \in \mathfrak{g}^\eta(s)$. Si un vecteur d'un s-sous-quotient de $\mathfrak{g}$ ou de $\mathfrak{g}^*$ est fixé par $s\exp X$, alors il est fixé par s et par X.*

A.4. Des modifications doivent également être apportées dans la rédaction de [22, numéro 3.2.2].

Il convient de réécrire la première phrase du deuxième paragraphe comme suit : « Soit $s \in G_{\mathrm{ell}}$ et $\mathscr{V}$ un ouvert $G(s)$-elliptique contenu dans $\mathfrak{g}^{\epsilon'(s)}(s)$, de sorte que l'application γ est une submersion de $G \times \mathscr{V}$ sur $\mathscr{W}(s,\mathscr{V})$ » et dans la suite du numéro, de remplacer partout où ils apparaîssent $\mathfrak{g}(s)_a$ et $\mathscr{W}(s,a)$ par respectivement $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}(s,\mathscr{V})$. Enfin, il convient de remplacer, au début de l'énoncé de la Proposition 3.2.3, la phrase « Soit $0 < a < \epsilon(s)$ » par « Soit $\mathscr{V}$ un ouvert $G(s)$-elliptique contenu dans $\mathfrak{g}^{\epsilon'(s)}(s)$ tel que la restriction de l'application γ à $G \times_{G(s)} \mathscr{V}$ (qui est une submersion) soit injective ».

A.5. Maintenant, nous indiquons ce qu'il faut changer dans la rédaction de la démonstration de l'assertion (ii) Théorème 6.2.1 de [22] afin d'obtenir une démonstration, que nous espérons correcte cette fois, du Théorème A.2.1.

Les premières modifications concernent la réduction au cas où χ est le caractère trivial. Dans le numéro 7.2.1, il faut remplacer le membre de phrase « $\epsilon(s) = \epsilon_K(s)$ et $\mathscr{W}(s,\epsilon(s)) \cap$

$K = \mathscr{W}_K(s, \epsilon(s))$ » de la fin du premier paragraphe par « $\epsilon'(s) = \epsilon'_K(s)$ et $\mathscr{W}(s, \mathscr{V}) \cap K = \mathscr{W}_K(s, \mathscr{V} \cap \mathfrak{k})$ », tandis que dans le numéro 7.2.2 il faut remplacer, partout où elles apparaissent, les expressions « $\mathfrak{g}_{\epsilon(s)}$ » et « $\mathscr{W}(s, \epsilon(s))$ » respectivement par « $\mathscr{V}$ » et « $\mathscr{W}(s, \mathscr{V})$ ».

Lorsque le caractère χ est trivial, dans la partie concernant le premier cas de réduction (pp. 1346 à 1351), il convient de remplacer, partout où elles apparaissent, les expressions « $\mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)}$ », « $\mathfrak{r}(s)_{\epsilon(s)}$ » et « $\mathscr{W}(s, \epsilon(s))$ » par, respectivement, « $\mathscr{V}$ », « $\mathscr{V} \cap \mathfrak{r}(s)$ » et « $\mathscr{W}(s, \mathscr{V})$ ». D'autre part, dans la page 1350, il faut remplacer l'inégalité « $\epsilon(s) \leqslant \epsilon_{R^{\mathfrak{n}}}(\tilde{s})$ » du deuxième paragraphe par « $\epsilon'(s) \leqslant \epsilon'_{R^{\mathfrak{n}}}(\tilde{s})$ », et supprimer, dans la première phrase du troisième paragraphe, le membre de phrase « D'une part, d'après 3.1.2, on a $\epsilon(s) \leqslant \frac{1}{2}\epsilon'(s)$ et d'autre part, » lequel est devenu inutile.

Maintenant, on s'intéresse au deuxième cas de réduction (p. 1351 et suivantes). Dans le deuxième paragraphe du numéro 8.2.2, il convient de remplacer l'inégalité « $\epsilon(s) \leqslant \epsilon_{G_1}(s_1)$ » par « $\epsilon'(s) \leqslant \epsilon'_{G_1}(s_1)$ » et de changer la dernière phrase en « De plus, $p(\mathscr{V})$ est un ouvert $G_1(s)$-elliptique de $\mathfrak{g}_1(s_1)$ satisfaisant les hypothèses de l'assertion (ii) du thèorème et p envoie $\mathscr{W}(s, \mathscr{V})$ sur l'ouvert $\mathscr{W}(s, p(\mathscr{V}))$ de G_1 ».

Dans la suite, il convient de changer partout où elle apparaît, l'expression « $\mathscr{W}(s, \epsilon(s))$ » en « $\mathscr{W}(s, \mathscr{V})$ ».

D'autre part, il faut changer au début du quatrième paragraphe du numéro 8.2.2, le membre de phrase « Alors $\alpha_1 \in \mathscr{D}(\mathscr{W}(s_1, \epsilon(s)))$ », en « Alors $\alpha_1 \in \mathscr{D}(\mathscr{W}(s_1, p(\mathscr{V}))$ » et, dans la formule du sixième paragraphe, l'expression « $\mathfrak{g}_1(s)_{\epsilon(s)}$ » en « $p(\mathscr{V} \cap \mathfrak{h})$ ».

Ensuite, les deux dernières phrases du deuxième paragraphe du numéro 8.2.5 doivent être réécrites comme suit « Dans ces conditions et grâce au Lemme 3.1.2, on a $H \cap \mathscr{W}(s, \mathscr{V}) = \bigsqcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathscr{W}_H(s_i, \operatorname{Ad} x_i(\mathscr{V}) \cap \mathfrak{h})$. De plus, il est immédiat que pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $\epsilon'(s) = \epsilon'(s_i) \leqslant \epsilon'_H(s_i)$ ».

Enfin, il ne reste plus qu'à remplacer, partout où elles apparaîssent dans ce qui suit, les expressions « $\mathfrak{h}(s)_{\epsilon(s)}$ », « $\mathscr{W}_H(s, \epsilon(s))$ » et « $\mathscr{W}_H(s_i, \epsilon(s))$ » par, respectivement, « $\mathscr{V} \cap \mathfrak{h}$ », « $\mathscr{W}_H(s, \mathscr{V} \cap \mathfrak{h})$ » et « $\mathscr{W}_H(s_i, \operatorname{Ad} x_i(\mathscr{V}) \cap \mathfrak{h})$ ».

Références

[1] M. Andler, La formule de Plancherel pour les groupes algébriques complexes unimodulaires, Acta. Math. 154 (1985) 1–104.

[2] A. Bouaziz, Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes, J. Funct. Anal. 70 (1987) 1–79.

[3] J.-Y. Charbonnel, La formule de Plancherel pour un groupe de Lie résoluble connexe. II, Math. Ann. 250 (1980) 1–34.

[4] J. Dixmier, Sur la représentation régulière d'un groupe localement compact connexe, Ann. Sci. École Norm. Sup. 2 (1969) 423–436, http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1969_4_2_3_423_0.

[5] J. Dixmier, Algèbres Enveloppantes, Cahiers Scientifiques, vol. XXXVII, Gauthier–Villars, Paris, 1974.

[6] P. Dourmashkin, A Poisson–Plancherel formula for the universal covering group with Lie algebra of type B_n, Trans. Amer. Math. Soc. 312 (1989) 719–738.

[7] J.-Y. Ducloux, Méthode des orbites et formule du caractère pour les représentations tempérées d'un groupe algébrique réductif non connexe, J. Lie Theory 12 (2002) 137–190, http://www.emis.de/journals/JLT/vol.12_no.1/8.html.

[8] M. Duflo, Représentations unitaires des groupes de Lie et méthode des orbites, in: Actualités Mathématiques, Luxembourg, 1981, Gauthier–Villars, Paris, 1982, pp. 125–138.

[9] M. Duflo, Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques, Acta Math. 149 (1982) 153–213.

[10] M. Duflo, On the Plancherel formula for almost algebraic real Lie groups, in: R. Herb, R. Johnson, R. Lipsman, J. Rosenberg (Eds.), Lie Group Representations, III, College Park, MD, 1982/1983, in: Lectures Notes in Math., vol. 1077, Springer, Berlin/New York, 1984, pp. 101–165.

[11] M. Duflo, C.C. Moore, On the regular representation of a nonunimodular locally compact group, J. Funct. Anal. 21 (1976) 209–243.

[12] M. Duflo, M. Raïs, Sur l'analyse harmonique sur les groupes de Lie résolubles, Ann. Sci. École Norm. Sup. 9 (1976) 107–144, http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1976_4_9_1_107_0.
[13] M. Duflo, M. Vergne, La Formule de Plancherel des Groupes de Lie Semi-simples Réels, in : Representations of Lie Groups, Kyoto, Hiroshima, 1986, in : Adv. Stud. Pure Math., vol. 14, Academic Press, Boston, MA, 1988.
[14] M. Duflo, M. Vergne, Cohomologie équivariante et descente, Astérisque 215 (1993) 5–108.
[15] M. Duflo, G. Heckman, M. Vergne, Projection d'orbites, formule de Kirillov et formule de Blattner, Mém. Soc. Math. Fr. 15 (1984) 65–128, http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__65_0.
[16] Harish-Chandra, Some results on an invariant integral on a semisimple Lie algebra, Ann. of Math. 80 (1964) 551–593.
[17] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups III, Ann. of Math. 104 (1976) 117–201.
[18] M.S. Khalgui, Caractères des groupes de Lie, J. Funct. Anal. 47 (1982) 64–77.
[19] M.S. Khalgui, Caractères des représentations factorielles normales d'un groupe de Lie connexe, Mém. Soc. Math. Fr. 15 (1984) 219–253, http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__219_0.
[20] M.S. Khalgui, P. Torasso, Formule de Poisson–Plancherel pour un groupe presque algébrique réel. I. Transformée de Fourier d'intégrales orbitales, J. Funct. Anal. 116 (1993) 359–440.
[21] M.S. Khalgui, P. Torasso, La formule de Poisson–Plancherel pour un groupe presque algébrique réel II, J. Funct. Anal. 144 (1997) 153–189.
[22] M.S. Khalgui, P. Torasso, La formule du caractère pour les groupes presque algébriques réels, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 52 (2002) 1301–1364.
[23] M.S. Khalgui, P. Torasso, La formule de Plancherel pour les groupes de Lie presque algébriques réels, in : P. Delorme, M. Vergne (Eds.), Noncommutative Harmonic Analysis, In Honor of Jacques Carmona, in : Progr. Math., vol. 220, Birkhaüser Boston, Boston, 2004, pp. 213–251.
[24] A.A. Kirillov, Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, Uspekhi Mat. Nauk 17 (1962) 57–110 (en Russe).
[25] A.A. Kirillov, Plancherel measure for nilpotent Lie groups, Funct. Anal. Appl. 1 (1967) 330–332.
[26] A.A. Kirillov, Characters of unitary representations of Lie groups, Funct. Anal. Appl. 2 (1968) 40–55.
[27] A.A. Kirillov, Characters of the unitary representations of Lie groups : Reduction theorems, Funct. Anal. Appl. 3 (1969) 36–47.
[28] N.V. Pedersen, Semicharacters and solvable Lie groups, Math. Ann. 247 (1980) 191–244.
[29] L. Pukanszky, Unitary representations of solvable Lie groups, Ann. Sci. École Norm. Sup. 4 (1971) 457–608, http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1971_4_4_4_457_0.
[30] L. Pukanszky, Characters of connected Lie groups, Acta Math. 133 (1974) 81–137.
[31] M. Rosenlicht, A remark on quotient spaces, An. Acad. Brasil. Ciênc. 35 (4) (1963) 487–489.
[32] W. Rossmann, Kirillov's character formula for reductive Lie groups, Invent. Math. 48 (1978) 207–220.
[33] W. Rossmann, Limit characters of reductive Lie groups, Invent. Math. 61 (1980) 53–66.
[34] P. Torasso, La formule de Poisson–Plancherel pour une classe de groupes presque algébriques, Mém. Soc. Math. Fr. 41/42 (1990) 1–185, http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1990_2_41-42__1_0.
[35] V.S. Varadarajan, Harmonic Analysis on Real Reductive Lie Groups, Lecture Notes in Math., vol. 576, Springer, Berlin/New York, 1977.
[36] M. Vergne, A Poisson–Plancherel formula for semi-simple Lie groups, Ann. of Math. 115 (1982) 639–666.
[37] M. Vergne, Representations of Lie groups and the orbit method, in : J.S. Bhama Srinivasan (Ed.), Emmy Noether in Bryn Mawr, Bryn Mawr, PA, 1982, Springer, New York, 1983, pp. 59–101.
[38] M. Vergne, A Plancherel formula without group representations, in : Operator Algebras and Group Representations, vol. II, Neptun, 1980, in : Monogr. Stud. Math., vol. 18, Pitman, Boston, MA, 1984, pp. 217–226.
[39] M. Vergne, Geometric quantization and equivariant cohomology, in : A. Joseph, F. Mignot, F. Murat, B. Prum, R. Rentschler (Eds.), First European Congress of Mathematics I, Paris 1992, in : Progr. Math., vol. 119, Birkhäuser Boston, Boston, 1994, pp. 249–295.